解答例

STEP II 2003、第 5 問

純粋数学 ・ ベクトルと直線

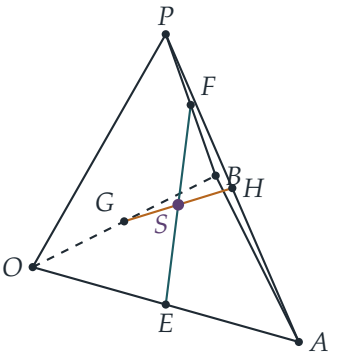
STEP II 2003、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q5

鍵となる考え方

4 つの中点（midpoint）を書き出し、各直線を「点 + パラメータ（parameter）× 方向」の形に表して、等しいとおく。3 次元空間の 2 直線は通常交わらないので、要点は 2 つの未知パラメータに関する 3 つの成分方程式が両立する（consistent）ことを示すところにある。**k** 成分を見るとすぐに決着がつく。幾何的には、O、A、B、P は四面体（tetrahedron）をなし、EF と GH はそれぞれ一組の対辺の中点どうしを結んでいる。このことから、2 直線は 4 頂点の「平均」で交わると予想される。



解答

直線 EF と GH は交わる

$\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ とおく。各中点の位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

である。EF 上の一般の点は $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$、$GH$ 上の一般の点は $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$ と表せる。2分の1の係数を払うために両方を2倍すると、

$$2(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})) = (a + s(l-a))\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})) = t(a+l)\mathbf{i} + (b + t(m-b))\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

2直線が交わるための必要十分条件（if and only if）は、これらを等しくする s と t の値が存在することである。したがって、次の3つがすべて成り立つ必要がある。

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

考えてみよう 未知数2つに対して方程式が3つある。そもそもなぜ解をもつはずなのだろうか。

一般には解をもたない。だからこそ空間内の2直線は通常交わらないのである。ここでは方程式のうち2つを解き、残りの1つも成り立つことを確かめる。$n \neq 0$ であるから、$\mathbf{k}$ の方程式より $s = t$ を得る。すると $\mathbf{i}$ の方程式は $a + sl - sa = sa + sl$ となり、$a = 2sa$ である。$a \neq 0$ より $s = \frac{1}{2}$ を得る。最後に、$s = t = \frac{1}{2}$ のとき $\mathbf{j}$ の方程式は

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

となり、これは成り立つ。よって $s = t = \frac{1}{2}$ のとき3つの方程式はすべて成り立ち、題意のとおり直線 EF と GH は交わる。

交点は EF の中点（GH の中点でもある）であり、

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = \tfrac{1}{4}(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}),$$

これは O、A、B、P の位置ベクトルの平均である。

点 T

S は DT の中点であるから $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$ であり、したがって $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$ となる。すなわち

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + (\tfrac{1}{2}n - d)\mathbf{k}.$$

平面 OAB は O を含み、ベクトル $a\mathbf{i}$ と $b\mathbf{j}$ を含む。a と b は零でないので、これらはそれぞれ x 軸、y 軸の方向を向いており、平面 OAB は平面 $z=0$ である。よって T がこの平面上にあるのは、その $\mathbf{k}$ 成分が消えるとき、すなわち $\frac{1}{2}n-d=0$ のとき、かつそのときに限る。ゆえに

$$d=\tfrac{1}{2}n.$$

$n\neq 0$ であるからこれは零でなく、条件 $d\neq 0$ と矛盾しない。

検算

- $a=2$、$b=4$、$\mathbf{p}=(2,0,4)$ とする。このとき $E=(1,0,0)$、$F=(1,2,2)$、$G=(0,2,0)$、$H=(2,0,2)$ である。EF と GH の中点はともに $(1,1,1)$ であり、これは $\frac{1}{4}\big((0,0,0)+(2,0,0)+(0,4,0)+(2,0,4)\big)$ に等しい。
- $d=2=\frac{1}{2}n$ とすると $T=2(1,1,1)-(0,0,2)=(2,2,0)$ であり、これは $z=0$ 上にある。
- コンピュータを用い、a,b,l,m,n,d を無作為に選んだ 20 000 通りについて厳密な有理数演算で確認したところ、2 直線は $s=t=\frac{1}{2}$ において上で求めた点で交わり、また T が平面 OAB 上にある（スカラー三重積（scalar triple product）が零になる）のは $d=\frac{1}{2}n$ のとき、かつそのときに限ることが確かめられた。

よくある間違い

- 最初から同じパラメータを用いて 2 直線を等しいとおくこと。それは答え $s=t$ を仮定していることになるが、ここではこれは $\mathbf{k}$ の方程式から導かれるものである。
- 成分方程式のうち 2 つを解いたところで止めてしまうこと。空間内の 2 直線が交わることを示すには、3 つ目の方程式も確かめる必要がある。
- $a\neq 0$ と $n\neq 0$ をどこで用いたかを書き忘れること。これらがあるからこそ、割り算をして s と t を求めることができるのである。

STEP のその先へ

任意の四面体において、対辺の中点どうしを結ぶ 3 本の線分（**双中線**（bimedian））は、すべて 4 頂点の平均である重心（centroid）を通り、そこでそれぞれ二等分される。これは三角形の中線（median）が重心で交わることの 3 次元版であり、点を重み付き平均として考える発想、すなわち重心座標（barycentric coordinates）やアフィン座標（affine coordinates）の背後にある考え方への入り口でもある。ストラング（Strang）の

Introduction to Linear Algebra（線形代数入門）は、ここで用いたベクトルと連立一次方程式の観点を展開しており、未知数より方程式の個数が多い連立方程式がどのようなときに解をもつかについても扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。