解答例

STEP II 2003、第 4 問

純粋数学 • 弓形の面積

> **STEP II 2003、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q4

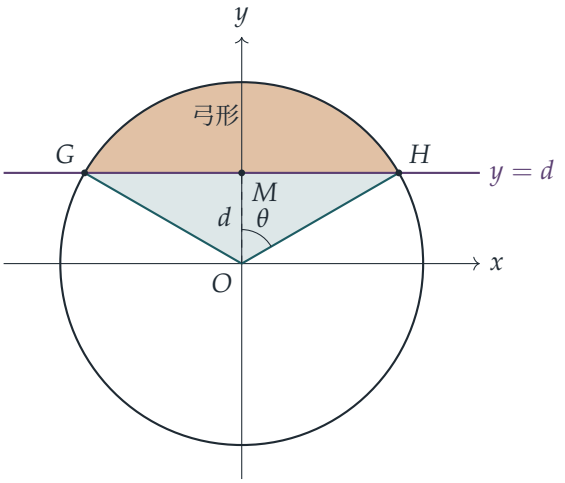
鍵となる考え方

小さい方の弓形（minor segment）は扇形（sector）から三角形を取り除いたものなので、最初の結果は単に「扇形から三角形を引いたもの」である。残りの部分については、$(*)$ における数 d が実は**円の中心から直線までの垂直距離**（*perpendicular distance*）であることに注目する。図を平行移動しても回転しても面積は変わらないので、どの場合も $(*)$ をそのまま用い、d をその距離で置き換えればよい。作業はすべて距離の計算に集約される。

解答

基本となる結果

直線は円と 2 点で交わるので、$0 < d < R$ である。$x^2 + y^2 = R^2$ に $y = d$ を代入すると $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$ となるから、$G = (-\sqrt{R^2 - d^2}, d)$、$H = (\sqrt{R^2 - d^2}, d)$ である。$M = (0, d)$ を GH の中点とし、$\theta = \angle MOH$ とおく。



直角三角形 OMH において、斜辺は $OH = R$、隣辺は $OM = d$ であるから $\cos\theta = d/R$ である。$0 < d/R < 1$ なので $\theta = \arccos(d/R)$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、対称性から $\angle GOH = 2\theta < \pi$ である。

中心角 2θ の扇形 OGH の面積は

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

である。三角形 OGH は底辺 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$、高さ $OM = d$ であるから、その面積は $d\sqrt{R^2 - d^2}$ である。$2\theta < \pi$ なので、中心 O は GH に関して劣弧と反対側にあり、扇形はちょうど三角形と小さい方の弓形を合わせたものになる。したがって

$$\text{小さい方の弓形の面積} = R^2 \arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

となり、これが $(*)$ である。

考えてみよう 幾何学的に見て、$(*)$ の d は実際には何を表しているか。

この議論では座標軸をまったく使っていない。使ったのは半径 R と、中心から弦（chord）までの距離 $OM = d$ だけである。図全体を平行移動や回転しても、この二つは保たれ、面積も保たれる。よって、半径 R の任意の円と、中心からの垂直距離が p（$0 \le p < R$）である任意の直線に対して、小さい方の弓形の面積は

$$R^2 \arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

である。（$p = 0$ のとき直線は直径であり、二つの部分は等しい半円となるが、$(\dagger)$ は正しく $\frac{1}{2}\pi R^2$ を与える。）各小問では p を求め、それを $(\dagger)$ に代入する。

小問 (i)

中心は (a,b) で、直線 $y=c$ は水平であるから、中心から直線までの距離は $p=|c-b|$ である。d を $|c-b|$ で置き換えると

$$R^2\arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right)-|c-b|\sqrt{R^2-(c-b)^2}.$$

となる。絶対値（modulus）が重要である。c は b より小さいこともありうる。

小問 (ii)

ここでは中心は O である。O から $y=mx+c$ までの距離が必要となる。直線が x 軸となす角を α とすると $\tan\alpha=m$ であり、直線は y 軸と $C=(0,c)$ で交わるとする。O から直線に垂線を下ろし、その足を F とする。OC（鉛直）と OF（直線に垂直）のなす角は、水平線と直線のなす角、すなわち α に等しい。よって直角三角形 OFC において

$$p=OF=|c|\,|\cos\alpha|=\frac{|c|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

である。（これは直線 $mx-y+c=0$ と点 $(0,0)$ に対するおなじみの公式 $|Ax_0+By_0+C|/\sqrt{A^2+B^2}$ にほかならない。）すると

$$\sqrt{R^2-p^2}=\sqrt{R^2-\frac{c^2}{1+m^2}}=\frac{\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

であるから、小さい方の弓形の面積は

$$R^2\arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}.$$

である。直線が円と交わるのはちょうど $c^2<R^2(1+m^2)$ のときなので、平方根は実数である。

小問 (iii)

$X=x-a$、$Y=y-b$ とおいて原点を中心に移す。円は $X^2+Y^2=R^2$ となり、直線は

$$Y+b=m(X+a)+c \quad\Longleftrightarrow\quad Y=mX+k, \qquad k=c+ma-b.$$

となる。これは小問 (ii) で c を k に置き換えたものであり、平行移動で面積は変わらない。よって $p=|c+ma-b|/\sqrt{1+m^2}$ であり、小さい方の弓形の面積は

$$R^2\arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right)-\frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2)-(c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

である。$m=0$ とおけば小問 (i) が、$a=b=0$ とおけば小問 (ii) が得られる。

考えてみよう 小問 (i) で、絶対値を付けずに単に $c-b$ と書いてはいけないのはなぜか。

$c<b$ ならば $(c-b)/R$ は負となり、arccos は $\frac{\pi}{2}$ より大きい角 $\pi-\theta$ を返し、第 2 項の符号が変わる。式は $R^2(\pi-\theta)+p\sqrt{R^2-p^2}$ となり、これは小さい方ではなく**大きい方**の弓形（major segment）の面積である。

検算

- $R=2$、$d=1$ とすると $\theta=\frac{\pi}{3}$ となり、$(*)$ は $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\approx 2.4567$ を与える。これは当然ながら円板の半分（$2\pi\approx 6.28$）より小さい。
- $d\to R$ のとき面積は 0 に近づき、$d=0$ のとき $\frac{1}{2}\pi R^2$ に等しい。
- 4 つの公式すべてを、数百組のランダムな円と直線について、弦の長さを直接数値積分した結果と照合した。一致の誤差は 2×10^{-6} 以内であった。

よくある間違い

- 絶対値を付け忘れる。符号付き距離を使うと、中心が直線の「間違った」側にあるときには大きい方の弓形の面積が得られてしまう。
- 小問 (ii) と (iii) で、垂直距離 $|c|/\sqrt{1+m^2}$ の代わりに鉛直方向の差 $|c|$ を使ってしまう。
- 扇形の面積に $\frac{1}{2}R^2\theta$ を使ってしまう。中心角は θ ではなく 2θ であることを忘れている。

STEP のその先へ

この問題は、面積が**等長変換**（*isometry*）、すなわち平面の平行移動・回転・鏡映によって変わらないという事実に基づいている。大学 1 年の講義では、これは等長変換のヤコビアン（Jacobian determinant）の絶対値が 1 であるという主張になり、そのため二重積分の変数変換公式によって面積は変わらない。等長変換と、それによって保たれる量を分類することは、幾何学や群論（group theory）への良い入り口である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、回転行列（rotation matrix）と、面積の拡大率としての行列式（determinant）が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。