解答例

STEP II 2003、第 3 問

純粋数学 • 無理数と数学的帰納法

> **STEP II 2003、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q3

鍵となる考え方

無理数（irrational number）であるという性質は「〜でない」という性質なので、自然な道具は対偶（contrapositive）である。すなわち、無理数の立方根が無理数であることを示す代わりに、立方根が有理数（rational number）ならばもとの数そのものも有理数でなければならないことを示す。この一つの事実が数学的帰納法（induction）を動かす原動力になる。なぜなら、各 u_{n+1} は u_n の立方根だからである。最後の小問では、$u_n \to 1$ に注目し、数列全体を整数だけずらす。こうしても各項は無理数のままである。

解答

無理数の立方根

x を実数とし、$y = \sqrt[3]{x}$ をその実数の立方根とする。したがって $y^3 = x$ である。対偶、すなわち「y が有理数ならば x は有理数である」を証明する。

p, q を整数、$q \neq 0$ として $y = \dfrac{p}{q}$ と仮定する。このとき

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

であり、p^3 と q^3 は整数で $q^3 \neq 0$ である。よって x は二つの整数の比、すなわち有理数である。

したがって、有理数の立方根は有理数からしか生じない。同値な言い方をすれば、x が無理数ならば $\sqrt[3]{x}$ は有理数になりえず、ゆえに無理数である。これが証明すべきこと

であった。

> **考えてみよう** なぜ命題を直接攻めないのか？

直接的な方針では「x は整数の比ではない」から出発することになるが、これでは具体的に計算する材料が何もない。対偶なら「$y = p/q$」から出発するので、扱える整数が手に入り、証明は一行で済む。仮定が何かが有理数で**ない**と述べているときは、対偶や背理法（proof by contradiction）を試してみる価値がある。

数学的帰納法

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$ であるから、指数法則（laws of indices）により

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

となる。よって各項は一つ前の項の立方根である。

基底段階。 $u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$ であり、これは無理数であると与えられている。

帰納段階。 ある正の整数 k について u_k が無理数であると仮定する。このとき $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$ は無理数の立方根であるから、最初の小問により無理数である。

ゆえに、数学的帰納法により、すべての正の整数 n について u_n は無理数である。

m に収束する数列

まず u_n の極限を求める。対数をとると

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

であり、指数関数は連続（continuous）であるから、$u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$ となる。また $\ln u_n > 0$ であるから、すべての n について $u_n > 1$ であり、各項は 1 に向かって減少する：

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

> **考えてみよう** 無理数であることを損なわずに、極限を 1 から m へ移すにはどうすればよいか？

無理数に整数を加えると無理数になる。実際、a が整数で $u + a = r$ が有理数であったとすると、有理数どうしの差は有理数であるから、$u = r - a$ も有理数になってしまう。

そこで、与えられた整数 m に対して

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

と定める。$m-1$ は整数で u_n は無理数であるから、各 a_n は無理数であり、

$$a_n \to 1+m-1=m \quad \text{ただし} n\to\infty.$$

となる。よって (a_n) は m に収束する無理数の無限数列である。これは $m=0$ を含むすべての整数 m に対して成り立つ。

（もう一つの自然な選択である $m\,u_n$ も無理数で m に収束するが、それは $m\neq 0$ のときに限る。$m=0$ のときは各項が 0 となり、これは有理数である。$m-1$ だけずらす方が安全な解答であるのはこのためである。）

検算

- 数値的に $u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$ であり、$u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n}$ が確かめられる。
- $m=4$ のとき、$a_1\approx 4.710$、$a_2\approx 4.196$、$a_3\approx 4.061$ であり、a_{20} は小数第 8 位を超えて 4 と一致する。
- 差 $a_n-m=u_n-1$ は正でおよそ $\ln 5/3^n$ であるから、一段階ごとにおよそ 3 分の 1 に縮む。

よくある間違い

- 逆（converse）、すなわち「無理数の 3 乗は無理数である」を証明してしまうこと。これは偽である：$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$。
- $m=0$ のときに破綻することに気づかずに $m\,u_n$ を用いること。
- $u_n\to 1$ であることの根拠を述べ忘れること。「指数が 0 に近づく」だけでなく、連続性について一言添えるか、上の対数による議論が必要である。

STEP のその先へ

この問題は、無理数が実数直線において**稠密**（dense）であることを示している。すなわち、すべての整数だけでなく、すべての実数が無理数の極限となる（有理数 $q_n\to x$ を用いて $q_n+\sqrt{2}/n$ を試してみよ）。有理数もまた稠密であるが、ある精密な意味では、無理数は有理数よりもはるかに多い。有理数は可算（countable）であるが、実数はそうではないのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、その最初の数章で稠密性、可算性、数列の極限を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。