解答例

STEP II 2003、第 2 問

純粋数学 ・ 逆三角関数

> **STEP II 2003、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q2

鍵となる考え方

式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ は、つねに 1 つのコサイン $R\cos(\theta - \alpha)$ の形に書き直せる。そうすると方程式は arccos に関する主張に変わり、一方で α そのものは arctan で表される。したがって、きれいな解 θ が見つかれば、π についての恒等式（identity）は「$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$」を書き換えたものにすぎない。本当に注意が必要なのは、それぞれの角が、用いる逆関数（inverse function）の値域（range）に入っているかを確かめる点だけである。

解答

第 1 の恒等式

$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に含まれるわかりやすい角を試してみる。$\theta = \frac{1}{3}\pi$ とすると

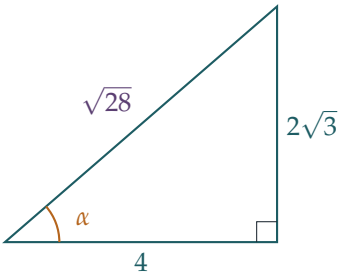
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

となるので、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ は解であり、しかも $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$ である。

次に、左辺を $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ の形に書く。係数を比較すると

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

であるから、$R^2 = 16 + 12 = 28$ より $R = \sqrt{28}$ であり、$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。$\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ はともに正なので、α は鋭角にとってよく、$\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$ となる。



したがって、方程式は

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

となり、これは $\theta=\frac{1}{3}\pi$ で成り立つ。

考えてみよう ただちに $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ と結論してよいだろうか？

そうとは限らない。$\cos x=c$ には多くの解があり、$\arccos c$ はそのうち $[0,\pi]$ に属するものだけである。よって、$\frac{1}{3}\pi-\alpha$ が $[0,\pi]$ に属することを確かめなければならない。tan は $(0,\frac{1}{2}\pi)$ で単調増加（increasing）であり、$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$ であるから、$0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$ が成り立つ。ゆえに

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

であり、$\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$ となる。移項して 3 倍すると

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の恒等式

同じ考え方をなぞる。示したいのは $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$ であるから、$\beta=\arctan(3/4)$ とおいて $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$ を調べる。

$0<\frac{3}{4}$ であるから β は鋭角であり、3–4–5 の直角三角形から $\sin\beta=\frac{3}{5}$、$\cos\beta=\frac{4}{5}$ である。すると、加法定理（addition formula）により

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

考えてみよう $\frac{1}{4}\pi+\beta$ は本当に arcsin が返す角だろうか？

arcsin の値域は $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ なので、$\frac{1}{4}\pi+\beta$ がその中に入っている必要がある。$\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ であり、tan は $(0, \frac{1}{2}\pi)$ で単調増加であるから、$0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$ となる。よって

$$\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{4}\pi+\beta < \frac{1}{2}\pi.$$

ゆえに $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$ であり、4 倍して移項すると

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

となる。これが求める結果である。

検算

数値的には、$\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$、$\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$ であり、その和は $1.047198 \approx \pi/3$、その 3 倍は 3.141593 である。第 2 の恒等式については、$\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$、$\arctan(3/4) \approx 0.643501$ であり、その差は $0.785398 \approx \pi/4$ である。また、ざっと調べると、$\frac{1}{3}\pi$ が $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ における方程式の唯一の解であることもわかる。その付近にあるもう 1 つの解 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$ は $\frac{1}{4}\pi$ より小さい。

よくある間違い

- $x \in [0, \pi]$ を確かめずに $\arccos(\cos x) = x$ と書いてしまう（あるいは $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ を確かめずに $\arcsin(\sin x) = x$ と書いてしまう）。厳密さに対する配点はまさにこの部分にある。
- $\tan\alpha$ の分子と分母を逆にしてしまう。$R\cos\alpha = 4$、$R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$ から得られるのは $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$ であって、$4/(2\sqrt{3})$ ではない。

STEP のその先へ

π を逆正接の組合せで表す恒等式は、$\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ のようなマチン（Machin）型の公式の基礎である。x が小さいとき $\arctan x$ の級数（series）は速く収束（converge）するため、これらの公式は π を多くの桁まで計算するのに用いられてきた。これらを見通しよく理解するには複素数（complex number）を使うとよい。$\arctan(b/a)$ は $a+b\mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、逆正接を足し合わせることは複

素数を掛け合わせることに対応する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。