解答例

STEP II 2003、第 12 問

確率・統計 ・ 分枝過程

> **STEP II 2003、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q12

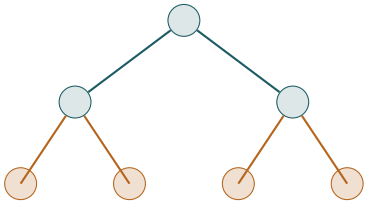
この問題は、*Beyond STEP* の第 12.15 節「**絶滅か爆発か**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/branching.html

鍵となる考え方

これは分枝過程（branching process）である。各世代は前の世代から作られ、どの粒子もそれぞれ独立（independent）に分裂する。すべてを支えているのは、m 個の粒子がそれぞれ独立に $\mathrm{B}(2, p)$ に従う個数の子を生むとき、その合計は $\mathrm{B}(2m, p)$ に従う、というただ一つの事実である。そこで、確率についても期待値についても、前の世代の大きさで条件づけて考える。

解答

モデルの意図どおり、異なる粒子はそれぞれ互いに独立に、また過去とも独立に崩壊すると仮定する。$0 < t < T$ の間に存在するただ一つの粒子について $X_0 = 1$ とおく。$t = nT$ において、存在している X_{n-1} 個の粒子はそれぞれ自分の子に置き換わるので、X_n は第 $n-1$ 世代の子の総数である。



図は $X_1 = 2$ の場合を示している。このとき 2 個の粒子は合わせて最大 4 個の子をもち、4 個の可能な子はそれぞれ独立に確率 p で生まれる。

同時確率

$X_1 \sim \mathrm{B}(2, p)$ であるから、$\mathrm{P}(X_1 = 2) = p^2$ である。$X_1 = 2$ のもとでは、2 個の粒子がそれぞれ独立に $\mathrm{B}(2, p)$ に従う個数の子を生むので、X_2 は成功確率 p の独立な 4 回の試行における成功回数である。すなわち $X_2 \mid X_1 = 2 \sim \mathrm{B}(4, p)$ である。したがって

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \text{ かつ} X_2 = 2) = \mathrm{P}(X_1 = 2)\,\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = p^2 \cdot \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6p^4 q^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

条件付き確率

条件付き確率（conditional probability）の定義を使うには $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ が必要である。これを X_1 で条件づけて求める。

- $X_1 = 0$ ならば個体群は絶滅しているので、$X_2 = 0$ である。
- $X_1 = 1$（確率 $2pq$）ならば、$X_2 \sim \mathrm{B}(2, p)$ であり、$\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) = p^2$ である。
- $X_1 = 2$ ならば、その寄与は先ほど求めた $6p^4 q^2$ である。

よって

$$\mathrm{P}(X_2 = 2) = 2pq \cdot p^2 + 6p^4 q^2 = 2p^3 q\,(1 + 3pq),$$

であり、したがって $0 < p < 1$ のとき

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{6p^4 q^2}{2p^3 q(1 + 3pq)} = \frac{3pq}{1 + 3pq}.$$

これを $\frac{9}{25}$ に等しいとおくと $75pq = 9 + 27pq$ となるので、$48pq = 9$、すなわち $pq = \frac{3}{16}$ である。$q = 1 - p$ を用いると、これは

$$p^2 - p + \tfrac{3}{16} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(p - \tfrac{1}{4}\right)\left(p - \tfrac{3}{4}\right) = 0,$$

となるので、$p = \frac{1}{4}$ または $p = \frac{3}{4}$ である。（$p = 0$ と $p = 1$ の場合は除かれる。$p = 0$ のときは事象 $X_2 = 2$ が起こりえず、$p = 1$ のときは条件付き確率が 0 になるからである。）

考えてみよう なぜ p の二つの値が同じ答えを与えるのだろうか。

条件付き確率は $pq = p(1-p)$ を通してのみ p に依存しており、pq は p を $1-p$ に置き換えても変わらない。したがって解は $p, 1-p$ という組で現れるはずであり、ここではそれが $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ である。

期待値

$X_{n-1} = m$ とする。この m 個の粒子はそれぞれ平均 $\mathrm{E}(X) = 2p$ 個の子を生むので、次の世代の大きさの期待値（expectation）は $2pm$ である。

$$\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = m) = 2pm.$$

m のとりうる値について平均をとると（全期待値の法則（law of total expectation））、

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_m \mathrm{P}(X_{n-1} = m)\, 2pm = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1}).$$

言葉で言えば、ある区間に存在するどの粒子も、次の区間に平均 $2p$ 個の粒子をもたらすということである。$\mathrm{E}(X_1) = 2p$（あるいは $\mathrm{E}(X_0) = 1$）であるから、この漸化式から等比数列（geometric sequence）が得られる。

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

極限

$p = \frac{1}{4}$ のとき、$0 < \frac{1}{2} < 1$ であるから、$n \to \infty$ において $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ となる。

$p = \frac{3}{4}$ のとき、$\frac{3}{2} > 1$ であるから、$\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ となる。

このように、条件付き確率の上では区別のつかない p の二つの値が、長期的にはまったく異なる振る舞いをもたらす。平均的に見ると、個体群は $p = \frac{1}{4}$ のときは消えていき、$p = \frac{3}{4}$ のときは爆発的に増える。

検算

- $p = \frac{3}{4}$ のとき $6p^4q^2 = \frac{243}{2048} \approx 0.1187$ であり、2 世代の個体群を 10^6 回シミュレーションしたところ 0.1186 が得られた。
- $p = \frac{1}{4}$ のとき $pq = \frac{3}{16}$ なので $3pq = \frac{9}{16}$ であり、$\dfrac{9/16}{25/16} = \frac{9}{25}$ となって、確かに正しい。

- いくつかの p について $X_1, \ldots, X_5$ の正確な分布（各世代は前の世代が与えられたもとで $\mathrm{B}(2m, p)$）を計算すると、平均はちょうど $(2p)^n$ となる。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X_2 = 2)$ を求めるときに、$X_1 = 1, X_2 = 2$ という経路を忘れること。$X_1 = 0$ を経由する経路は正しく寄与が 0 である。
- $X_2 \mid X_1 = 2$ を、独立な二つのコピーの和である $\mathrm{B}(4, p)$ ではなく、$2 \times \mathrm{B}(2, p)$（1 個の粒子の子の数の 2 倍）とみなしてしまうこと。

STEP のその先へ

これはゴルトン（Galton）＝ワトソン（Watson）分枝過程であり、もともとは姓が途絶える理由を説明するために研究されたものである。子の数の平均 $\mu = 2p$ がすべてを決める。$\mu \leq 1$ ならば個体群は確率 1 で絶滅し、$\mu > 1$ ならば正の確率で永遠に存続する。$p = \frac{3}{4}$ の場合でも、個体群は確率 $\frac{1}{9}$ で絶滅する。この値は確率母関数（probability generating function）から得られる方程式 $s = (q + ps)^2$ の最小の解である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この問題から直接つながる形で、母関数を用いて分枝過程を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。