解答例

STEP II 2003、第 11 問

力学 ・ 放物運動

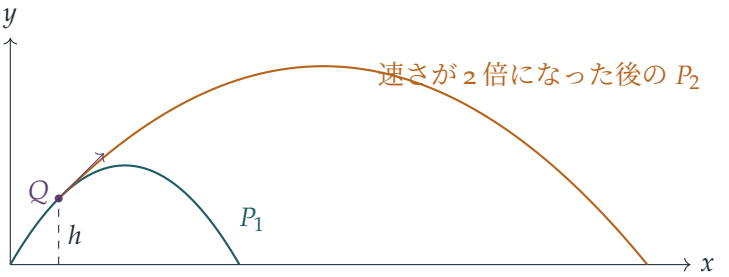
> **STEP II 2003、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q11

鍵となる考え方

速度の水平成分と鉛直成分を別々に扱う。運動の向きが水平と 45° をなすのは、ちょうど二つの成分が等しくなるときであり、そこから最初の時刻が直ちに求まる。速さが 2 倍になっても向きは変わらないので、両方の成分がともに 2 倍になる。残りの飛行は、既知の高さから始まる新たな放物運動（projectile motion）の問題となる。

解答

各粒子を、空気抵抗がなく重力のみを受けて運動する質点の投射体としてモデル化する。$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおく。$\alpha > 45°$ であるから $s > c > 0$ である。



この図では $\alpha = 60°$ としている。両方の粒子は、運動の向きが初めて水平と 45° をなす点 Q までは青緑色の経路をたどる。その後、P_2 は琥珀色の経路をたどる。

P_1 の飛行時間

時刻 t における鉛直方向の変位は $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$ である。これが再びゼロになるのは

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

のときである。

最初に 45° となる瞬間

時刻 t における速度の成分は

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

である。水平成分は決して変化しない。発射の時点では $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$ であるから、運動の向きは 45° より急である。$\dot{y}$ が減少するにつれて角度は小さくなり、粒子がまだ上昇している間の $\dot{y} = \dot{x}$ となるときに初めて 45° となる：

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

（下降中の $\dot{y} = -Vc$ となるときにも運動の向きは再び 45° をなすが、それはもっと後である。）$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$ であるから

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

となり、示すべき式が得られた。

P_2 の飛行

時刻 t_1 までは、P_2 は P_1 とまったく同じように運動する。t_1 において速度の両成分はともに Vc に等しく、高さは

$$\begin{aligned} h = Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 &= \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right] \\ &= \frac{V^2}{2g}(s-c)[2s-(s-c)] = \frac{V^2}{2g}\,(s^2 - c^2). \end{aligned}$$

である。$s > c$ であるから、これは正である。

> **考えてみよう** 「速さが 2 倍になる」ことは、速度の各成分にどのような影響を与えるか。

速さは変わるが向きは変わらないので、速度ベクトル（velocity vector）全体が 2 倍される。両成分はともに $2Vc$ となる。すなわち粒子は、高さ h から水平より 45° 上向きに、速さ $2\sqrt{2}\,Vc$ で飛び出す。

速さが 2 倍になってから P_2 が着地するまでの時間を τ とする。Q から上向きに鉛直方向の変位を測ると、着地とは変位が $-h$ となることである：

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

両辺に $-2/g$ を掛け、無次元量 u を用いて $\tau = (V/g)u$ と書くと

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

となる。解の積は $-(s^2 - c^2) < 0$ であるから、一方の解は負である。$\tau > 0$ が必要なので、正の符号をとる：

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

したがって

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

である。$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$ で割り、$\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$（$s > 0$ であるから成り立つ）を用いると

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

- $\alpha \to 90^\circ$ のとき $\cot\alpha \to 0$ であり、比は 2 に近づく。これは理にかなっている。このとき 45° となる瞬間は飛行の最高点であり、そこでは速さがゼロなので、2 倍にしても何も変わらず $T_2 = T_1$ となる。
- $\alpha = 45^\circ$（境界の場合）では、速さが 2 倍になるのは発射の瞬間なので、P_2 は単に $2V$ で投射されることになり、$T_2 = 2T_1$ である。公式は $1 + 1 + 2 = 4$ を与え、一致する。
- $\alpha = 60^\circ$ のとき、$t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$ であり、$2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$ である。α と V を無作為に 2000 通り選んで P_2 の飛行を逐次的に数値シミュレーションしたところ、T_2 の公式と一致した。

よくある間違い

- 鉛直成分だけ、あるいは水平成分だけを 2 倍にしてしまう。向きは変わらないので、両方とも 2 倍になる。

- P_2 の運動を、高さ h からではなく地面の高さから再開させてしまう。
- 符号を確かめずに τ として負の解をとってしまう。

STEP のその先へ

速度の瞬間的な変化は**力積**（impulse）である。すなわち、非常に大きな力が非常に短い時間だけ働くものである。大学 1 年の力学では、衝突、ロケットの噴射、蹴りなどを力積として扱う。軌道をいくつかの部分に分け、それらを力積でつなぐというのは、まさに軌道変更の計画の立て方そのものであり、そこではエンジンの短い噴射によって宇宙船をある円錐曲線軌道から別の円錐曲線軌道へと移す。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と運動量を丁寧に展開しており、この種の問題を数多く収録している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。