解答例

STEP II 2003、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある束縛運動

> **STEP II 2003、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q10

鍵となる考え方

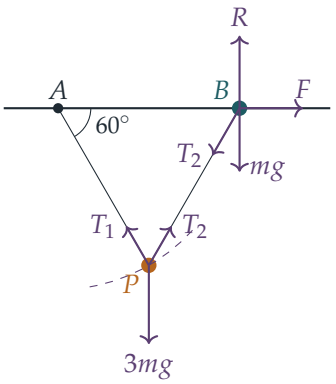
最初の状態では $AP = PB = AB = \ell$ であるから、APB は正三角形（equilateral triangle）である。AP はたるまないので、P は A を中心とする円周上を動く。すべては静止状態から始まるので向心（centripetal）項は現れず、P の初期加速度はその円の接線（tangent）方向を向かなければならない。これで加速度の向きが決まる。また、P はつねに AB を底辺とする二等辺三角形（isosceles triangle）の頂点にあるので、P の水平方向の位置はつねに B の位置の半分である。最後の小問では、B と P のそれぞれについてニュートン（Newton）の第二法則（second law）を書き下す。P について加速度の方向（AP に垂直な方向）に力を分解（resolve）すれば、AP の張力（tension）は一切現れない。

解答

B と P を質点（particle）とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）ものとしてモデル化する。糸の両側の部分はいずれもたるまない。A を原点とし、針金を x 軸に沿ってとり、B は最初 $(\ell, 0)$ にあるとする。角 PAB を θ とおく。$AP = PB = \ell$ であるから、

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

であり、最初は $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。



P の加速度の向き

$AP = \ell$ は一定なので、P は A を中心とする半径 ℓ の円（図の破線）の上を動く。円周上の点の加速度は、中心に向かう成分 $\ell\dot{\theta}^2$ と接線方向の成分 $\ell\ddot{\theta}$ からなる。系は静止状態から放されるので、最初は $\dot{\theta} = 0$ である。したがって P の初期加速度は接線方向、すなわち AP に垂直な方向を向く。

AP は水平と $60°$ の角をなすので、AP に垂直な方向は水平と $30°$ の角をなす。加速度の大きさを a とすると

$$a_1 = a\cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30° = \tfrac{1}{2}a,$$

であり、よって $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$ となって、示すべき結果が得られる。

θ を用いて表すと次のようになる。P の位置を微分して $\dot{\theta} = 0$ とおくと、初期加速度は $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$ となる。$\ddot{\theta} > 0$ のとき、P は下向きかつ A に近づく向きに動く。その大きさは $a = \ell\ddot{\theta}$ である。

B の加速度

P は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）上にあるので、B の x 座標はつねに P の x 座標のちょうど 2 倍である。これを 2 回微分すると、B の加速度はつねに P の水平方向の加速度の 2 倍であることがわかる。したがって B の初期加速度は大きさ $2a_1$ で A に向かう向きであり、示すべき結果が得られる。

> **考えてみよう** B が A に向かって動くといえるのはなぜか。また、摩擦はどちら向きにはたらくか。

P が落下するにつれて θ は増加するので、$x_B = 2\ell\cos\theta$ は減少する。よって B は A に向かって滑り、B にはたらく摩擦（friction）は A から遠ざかる向き（x 軸の正の向き）にはたらく。ここでは B が実際に動くと仮定している。問題文が摩擦を滑っている間

の値である $\frac{\sqrt{3}}{6}R$ として与えていることから、このことが確かめられる。

初期加速度の大きさ

AP と PB の張力をそれぞれ T_1、T_2 とする。B にはたらく垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦を $F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$ とする。P の初期加速度の大きさを a と書くと $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、B の加速度は A に向かって $2a_1 = \sqrt{3}\,a$ である。

ビーズ B。糸 BP は B を水平より 60° 下向きに、A に近づく向きに引く。B には鉛直方向の加速度がないので、鉛直方向に分解すると

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

を得る。A に向かう向きを正として水平方向に分解すると

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

となるので

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

質点 P。P の加速度の方向、すなわち水平より 30° 下向きで A に近づく方向に分解する。この方向は AP に垂直なので、T_1 は寄与しない。重力 $3mg$ はこの方向と 60° の角をなすので、寄与は $3mg\cos 60^\circ = \frac{3}{2}mg$ である。張力 T_2 は PB に沿って、水平より 60° 上向きで A から遠ざかる向きにはたらく。これは加速度の方向と 150° の角をなすので、寄与は $T_2\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_2$ である。よって

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

(1) を (2) に代入すると

$$\begin{aligned} 3ma &= \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg, \\ 9ma &= \tfrac{1}{2}mg, \end{aligned}$$

となるので、P の初期加速度の大きさは

$$a = \frac{g}{18},$$

であり、示すべき結果が得られた。

この答えは矛盾がない。(1) より $T_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$ であるから、糸 PB はたるんでいない。また $R = \frac{7}{3}mg > 0$ である。P について水平方向に分解すると $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \frac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$ となるので、AP もたるんでいない。

検算

- 用いなかった P の鉛直方向の式：$\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1+T_2)-3mg=\frac{35}{12}mg-3mg=-\frac{1}{12}mg$。これは本来そうあるべきとおり $-3ma_2=-3m\cdot\frac{g}{36}$ に等しい。
- 数値的に、B と P の位置を微分して $a_1/a_2\approx 1.7320508$ および $a_B/a_1=2$ を得た。次に $g=9.81$ として、3 つの力の方程式を T_1、T_2、$\ddot{\theta}$ について解いた。その結果 $|a|=0.545=g/18$ となり、$T_2/mg\approx 1.5396$、$R/mg\approx 2.3333$ であった。
- 摩擦がなければ、(1) は $T_2=2\sqrt{3}\,ma$ となり、(2) から $6ma=\frac{3}{2}mg$、すなわち $a=g/4$ が得られる。摩擦は運動を遅くするはずであり、実際 $g/18<g/4$ である。

よくある間違い

- 向心項を含めてしまう。放した瞬間は $\dot{\theta}=0$ なので、加速度は純粋に接線方向である。
- T_2 が B を下向きに引き、そのため R が、したがって摩擦が大きくなることを忘れる。$R=mg$ とすると誤った答えになる。
- P について水平方向と鉛直方向に分解する。この方法でも解けるが、T_1 が入り込み、式がもう 1 本必要になる。AP に垂直な方向に分解すれば、これを消去できる。

STEP のその先へ

これは自由度（degree of freedom）1 の拘束された系である。すべてがただ 1 つの角 θ によって決まる。位置を θ で表して微分することは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の第一歩である。ラグランジュ力学では、T_1 のような拘束力（constraint force）は、方向をうまく選ぶ工夫によってではなく、系統的に消去される。摩擦はこの枠組みにうまく収まらない。このような問題がニュートン力学的な手法の良い練習になる理由の 1 つはここにある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、拘束された運動や一様でない円運動を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。