解答例

STEP II 2003、第 1 問

純粋数学 • 連立 1 次方程式

STEP II 2003、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/03-s2-q1

鍵となる考え方

未知数 x は常に ax の形でしか現れず、y はどの方程式でも係数 -1 で現れる。したがって隣り合う方程式どうしを引くと y は完全に消え、得られる二つの差の式は左辺が同じになる。そのため、連立方程式（system of equations）が解をもつ（consistent）のは b がただ一つの値をとるときに限られ、解をもつ場合には自由なパラメータ（parameter）が一つ残る。問題の残りの部分は、そのパラメータをうまく選ぶことに尽きる。

解答

方程式に (1), (2), (3) と番号をつける。(2) から (1) を、(3) から (2) を引くと

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$

$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

を得る。連立方程式の解はどれも (A) と (B) の両方を満たすから、解が存在しうるのは $4 = b - 7$、すなわち $b = 11$ のときだけである。これは a の値によらず成り立つ。

小問 (i)

$a = 0$ のとき、方程式は $-y - z = 3$, $-y - 3z = 7$, $-y - 5z = b$ となり、x はまったく現れない。

解が存在するならば、上の注意により $b = 11$ である。

逆に $b = 11$ とする。このとき (A) は $-2z = 4$ となるので $z = -2$ であり、(1) から

$y = -3 - z = -1$ を得る。$y = -1, z = -2$ を三つの方程式すべてに代入して確かめると

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 6 = 7, \qquad 1 + 10 = 11 = b,$$

となるので、(x が何であっても) 解が得られる。よって、方程式が解をもつのは $b = 11$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (ii)

今度は $a \neq 0$ かつ $b = 11$ とする。$z = \lambda$ とおく。(A) から $ax = 4 + 2\lambda$ であり、$a \neq 0$ なので両辺を a で割ることができて

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}.$$

となる。すると (1) から $y = ax - z - 3 = 4 + 2\lambda - \lambda - 3 = 1 + \lambda$ を得る。

これらの値は (1) と (2) だけを使って求めたので、(3) も満たすことを確かめなければならない：

$$3ax - y - 5z = 3(4 + 2\lambda) - (1 + \lambda) - 5\lambda = 12 + 6\lambda - 1 - 6\lambda = 11 = b.$$

したがって、任意の数 λ に対して

$$x = \frac{4 + 2\lambda}{a}, \qquad y = 1 + \lambda, \qquad z = \lambda$$

は $z = \lambda$ を満たす解であり、これが求めるものである。(実はこれらが解の**すべて**である。どの解についても z はある値 λ をとり、上の計算により x と y は決まってしまうからである。)

考えてみよう なぜ方程式 (3) を別に確かめなければならないのだろうか。

x と y を求めるのに使ったのは (1) と (2)（(1) と (A) の形で）である。三つの未知数に関する三つの方程式は、自動的につじつまが合うわけではなく、b が関わってくるのはまさに (3) である。$b = 11$ が使われるのはこの確認の部分である。

小問 (iii)

$a = 2$ のとき、小問 (ii) により解はすべて $(x, y, z) = (2 + \lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ と表される。このとき

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2 + \lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 \\ &= 3\lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ &= 3(\lambda + 1)^2 + 2, \end{aligned}$$

であり、これが最小値 2 をとるのはちょうど $\lambda = -1$ のときである。よって求める解は

$$x = 1, \qquad y = 0, \qquad z = -1.$$

である。幾何学的には、解全体は方向 $(1,1,1)$ の直線をなし、ここで求めているのはその直線上で原点に最も近い点である。実際 $(1,0,-1)\cdot(1,1,1) = 0$ なので、この点の位置ベクトル（position vector）は直線に垂直であり、当然そうなるべきである。

小問 (iv)

冒頭の注意により b は 11 でなければならない。$a = 0$ ならば、小問 (i) により $y = -1$, $z = -2$ となり、$y^2 + z^2 = 5$ で大きすぎる。よって $a \neq 0$ であり、小問 (ii) により解は $x = (4 + 2\lambda)/a, y = 1 + \lambda, z = \lambda$ である。

> **考えてみよう** y と z が小さいままで、どうして x を非常に大きくできるのだろうか。

a が現れるのは $x = (4 + 2\lambda)/a$ の中だけである。λ を選ぶと y と z が定まり、そのうえで a を十分小さくとれば x をいくらでも大きくできる。

$y^2 + z^2 = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 < 1$、すなわち $2\lambda(\lambda + 1) < 0$、すなわち $-1 < \lambda < 0$ が必要である。$\lambda = -\frac{1}{2}$ とすると、$y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$ で $y^2 + z^2 = \frac{1}{2} < 1$ となり、一方 $x = 3/a$ である。

$$a = 10^{-6}$$

と選べば $x = 3 \times 10^6 > 10^6$ となる。したがって $a = 10^{-6}$（ただし $b = 11$）とすればよい。

より一般に、$-1 < \lambda < 0$ のとき $2 < 4 + 2\lambda < 4$ であるから、条件を満たす解が存在するのはちょうど $0 < a < 4 \times 10^{-6}$ のときである。a が負のときは $x < 0$ となるので条件を満たさない。

検算

- $a = 2, (x,y,z) = (1,0,-1)$ を元の方程式に代入すると、$2 - 0 + 1 = 3, 4 - 0 + 3 = 7, 6 - 0 + 5 = 11$ となる。
- 小問 (iv) について、$a = 10^{-6}, (x,y,z) = (3 \times 10^6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ のとき、$3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3, 6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 7, 9 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 11$ となる。
- 無作為に選んだ数百組の a と λ について、小問 (ii) の式が三つの方程式すべてを満たすことを厳密な分数計算で確かめた。また、λ についての格子探索により、小問 (iii) で $\lambda = -1$ のとき最小値 2 をとることも確認した。

よくある間違い

- 二つの方程式から x と y を求め、三つ目の方程式の確認を忘れる。
- 小問 (iv) で、y と z は「両方同時には小さくできない」として不可能だと決めつける。実際にはできる。$y - z = 1$ から導かれるのは $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$ だけである。

STEP のその先へ

これは線形代数における階数（rank）と解の存在（consistency）への最初の入り口である。ここでの係数行列（coefficient matrix）は正則でない（singular）（その行は $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$ を満たす）ので、右辺が同じ関係式を満たすかどうかに応じて、連立方程式は解をまったくもたないか、直線一本分の解をもつかのどちらかになる。小問 (iv) は、正則に近い行列ではなく特異に近い（nearly singular）連立方程式が数値計算でなぜ危険なのかも示している。わずかな係数 a が莫大な解を生み出してしまうのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、小問 (iii) のような最小ノルム解（least-norm solution）も含めて、これらすべてを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。