解答例

STEP I 2003、第 9 問

力学 ・ 点を通る放物運動

STEP I 2003、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

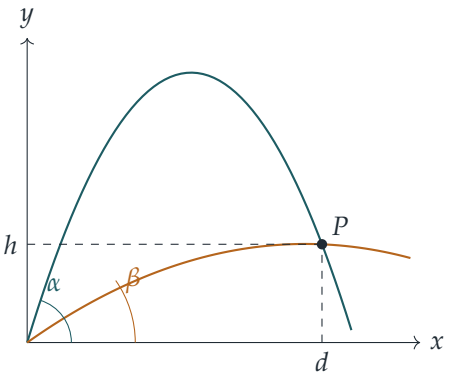
step.maths.org/questions/03-s1-q9

鍵となる考え方

水平方向と鉛直方向の変位を書き下し、時間を消去して、$\sec^2\theta$ を $1+\tan^2\theta$ で置き換える。すると軌道（trajectory）の方程式は $T=\tan\theta$ についての 2 次方程式（quadratic）になる。そこから先はすべてこの 2 次方程式の話である。角が 2 つあるということは異なる 2 つの実数解をもつということなので、判別式（discriminant）を調べればよい。また $\alpha+\beta$ は、$\tan(\alpha+\beta)$ の公式を通じて、解の和と積によって決まる。

解答

質点は重力のみを受けて自由に運動する（空気抵抗（air resistance）はない）とモデル化し、投射点を原点、P に向かう水平方向を x 軸、鉛直上向きを y 軸とする。すると P は点 (d,h) であり、$d>0$ である。$h>0$、すなわち P が投射点より上にあるとする。$h\leq 0$ の場合については最後に改めて触れる。



T の 2 次方程式

水平方向の速度は一定値 $V\cos\theta$ であり、鉛直方向の運動は一定の加速度 $-g$ をもつので、時刻 t において

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

質点は時刻 $t = d/(V\cos\theta)$ に $x = d$ に達する（質点は P に向かって進むので、ここで $\cos\theta > 0$ である）。これを y に代入して $y = h$ とおくと、

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}(1+T^2),$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いた。両辺に $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$ を掛けると、

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - (1+T^2), \qquad \text{すなわち、} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

となり、題意が示された。

異なる 2 つの角

与えられた V（したがって与えられた k）に対して、可能な投射角は、正接がこの 2 次方程式の解となるような $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。tan はこの区間で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、異なる実数解 T は異なる角を与える。よって、2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもてばよく、それは判別式が正であるときに限る：

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd-h)^2 > h^2 + d^2,$$

ここでは $d^2 > 0$ を掛け、さらに kd について平方完成（completing the square）した。

> **考えてみよう** 不等式を 2 乗すると誤りが生じうるのに、なぜ与えられた条件から $(kd-h)^2 > h^2 + d^2$ が導かれるのか？

$kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$ ならば、$kd - h > \sqrt{h^2+d^2} > 0$ である。両辺が正なので、2 乗しても不等号の向きは保たれる：$(kd-h)^2 > h^2 + d^2$。よって判別式は正であり、異なる 2 つの解 T、したがって異なる 2 つの投射角が存在する。

（逆（converse）も成り立つ。$(kd-h)^2 > h^2+d^2$ となるもう一つの場合は $kd < h - \sqrt{h^2+d^2}$ であるが、$\sqrt{h^2+d^2} > |h|$ より右辺は負であり、一方 $kd = V^2/g > 0$ である。したがって、2 つの角が可能となるのは $kd > h + \sqrt{h^2+d^2}$ のときちょうどそのときに限る。）

2 つの角はどちらも確かに水平より上向きである。解の和は $2k > 0$、積は $1 + 2kh/d > 0$（$h > 0$ より）なので、どちらの解も正である。

角の和

$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を 2 つの解とする。2 次方程式より、

$$\tan\alpha+\tan\beta=2k,\qquad \tan\alpha\tan\beta=1+\frac{2kh}{d}.$$

積は 1 ではない（$kh/d\neq 0$ より）ので、$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$ であり、加法定理（compound-angle formula）が使える：

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2k}{-2kh/d}=-\frac{d}{h}.$$

k が消えていることに注意しよう。角の和は速さによらないのである。

考えてみよう $\tan(\alpha+\beta)=-d/h$ には無数の解がある。$\alpha+\beta$ はそのうちのどれか？

$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ を示したので、$0<\alpha+\beta<\pi$ である。さらに $\tan(\alpha+\beta)<0$ なので、$\alpha+\beta$ は $(\frac{\pi}{2},\pi)$ にある。$\arctan(d/h)\in(0,\frac{\pi}{2})$ かつ $\tan(\pi-u)=-\tan u$ であるから、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ にあって正接が $-d/h$ となる唯一の角は $\pi-\arctan(d/h)$ である。したがって

$$\alpha+\beta=\pi-\arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

となり、題意が示された。

これをうまく見る方法がある。$\arctan(d/h)$ は OP と鉛直上向きとのなす角なので、P の仰角（angle of elevation）を γ とすると $\pi-\arctan(d/h)=\frac{\pi}{2}+\gamma$ である。すると $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma}{2}$ となる。つまり、2 つの投射方向は、OP と鉛直線とのなす角の二等分線に関して対称なのである。

検算

- $h=0$（目標が同じ高さにある）のとき、公式は $\alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ を与える。これは、同じ射程（range）を与える、おなじみの余角の組である。
- $d=3$、$h=4$、$k=4$ とする。このとき $kd=12>4+5$ であり、解は $T=4\pm\sqrt{13/3}$ で、$\alpha\approx 1.4078$、$\beta\approx 1.0903$ となる。よって $\alpha+\beta\approx 2.4981$ であり、これは $\pi-\arctan(0.75)\approx 2.4981$ に等しい。
- 数千組のランダムな d、h、k について、2 つの角それぞれでの飛行を数値シミュレーションすると、軌道は (d,h) を通り、条件と角の和の両方が確かめられる。

よくある間違い

- $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ を忘れてしまい、T の 2 次方程式にたどり着けない。

- $\alpha+\beta=\arctan(-d/h)=-\arctan(d/h)$ と書いてしまう。これは負である。逆正接（inverse tangent）は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ の角しか返さないので、$\alpha+\beta$ の範囲を用いて正しい分枝（branch）を選ばなければならない。
- $h<0$（目標が投射点より下にある）の場合を不注意に扱う。このときは一方の解が負になりうるので、一般に正しい主張は $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+\arctan(h/d)$ である。これが問題の形と一致するのは $h>0$ のときに限る。

STEP のその先へ

2 つの角が一致する境界の場合 $kd=h+\sqrt{h^2+d^2}$ は、速さ V でのすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）$y=\dfrac{V^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2V^2}$ を描く。その内側の点には 2 通りの方法で、その上の点には 1 通りの方法で到達でき、外側の点には到達できない。曲線族の包絡線は、方程式とそのパラメータについての導関数を連立させて解くことで求められ、微分方程式や光学でも再び登場する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動や束縛運動をこのような丁寧さで展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。