解答例

STEP I 2003、第 8 問

純粋数学 ・ ロジスティック微分方程式

> **STEP I 2003、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q8

鍵となる考え方

「A が B に変化する速さ」を導関数（derivative）に翻訳する。これは B の体積が増加する速さである。$x = 1 - y$ であるから、y だけについての変数分離形（separable variables）の微分方程式（differential equation）が得られ、部分分数分解（partial fractions）によって積分が完了する。最後の小問は、$x = 1 - y$ の式が 0 に到達しうるかどうかを問うものであり、その答えは指数関数が決して無限大にならないという事実に基づいている。

解答

方程式を立てる

B の体積は yV であり、V は一定である。A は速さ $kVxy$ で B に変化するので、B の体積はその速さで増加する：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

ここでは V で割り、$x = 1 - y$ を用いた。（同じことであるが、A の体積はこの速さで減少する：$V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ であるから、これは同じ内容を表している。）

方程式を解く

初めに $x > 0$ かつ $y > 0$ であるから、$0 < y < 1$ である。$0 < y < 1$ である間は $y(1-y)$ で割って変数を分離できる：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k \,\mathrm{d}t.$$

部分分数分解により $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$ であるから、

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

となる。ここで y と $1-y$ がともに正であることを用いたので、絶対値記号は不要である。両辺の指数をとり、$D = \mathrm{e}^c$ とおくと、

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

すると $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$ であるから $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$ となり、

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

が示すべき式として得られる。$t = 0$ を代入すると、x_0 と y_0 を初期値として $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$ であることがわかる。特に $D > 0$ である。

> **考えてみよう** 積分を行うために $0 < y < 1$ を仮定した。これがすべての時刻で成り立ち続けることは、どうすればわかるだろうか。

成り立たないと仮定し、y が初めて 0 または 1 に達する時刻を T とする。$0 \le t < T$ では上の計算が有効であるから、そこでは y は先の式で与えられる。y は連続であるから、$y(T)$ は $t \to T$ のときの式の極限、すなわち $D\mathrm{e}^{kT}/(1 + D\mathrm{e}^{kT})$ に等しい。$D > 0$ であるからこれは 0 と 1 の間に厳密に含まれ、矛盾である。したがってすべての t で $0 < y < 1$ であり、式はすべての t で成り立つ。

A が完全に変化することはあるか

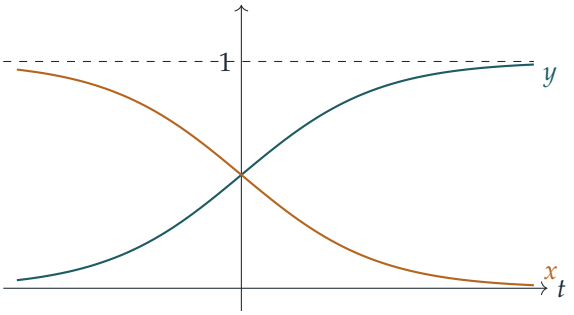
ない。式より

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

であり、$D\mathrm{e}^{kt}$ はすべての t で有限であるから、どの時刻でも $x > 0$ である。つまり A は常にいくらか残っている。しかし $t \to \infty$ のとき（$k > 0$ かつ $D > 0$ であるから）

$De^{kt} \to \infty$ となり、$x \to 0$、$y \to 1$ となる。変化は完了にいくらでも近づくが、有限の時間で完了することはない。

これは物理的にも納得がいく。反応速度 $kVxy$ は残っている A の量に比例するので、A が少なくなるにつれて反応は遅くなるのである。



この概形（$D = k = 1$ の場合）は、1 に近づく y の S 字型のロジスティック曲線（logistic curve）と、0 に近づく x の曲線を示している。どちらも極限値に到達することはない。

検算

- 答えを微分する：$u = De^{kt}$ とおくと $y = u/(1+u)$ であり、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$ となって、確かに成り立つ。
- $D = k = 1$（つまり等しい体積から始める場合）のとき、式は $t = \ln 3$ で $y = \frac{3}{4}$ を与える。また、k と初期値を無作為に 200 通り選んで方程式を数値的に時間発展させたところ、式との誤差は 10^{-12} 以内で一致し、x は終始正のままであった。

よくある間違い

- 「極限で $y = 1$」を「ある時刻で $y = 1$」と取り違えること。$t \to \infty$ のときの極限は、有限のどの時刻でも達成されない。
- $\ln(y/(1-y))$ の段階で $0 < y < 1$ が必要であることを忘れる、あるいはその条件が保たれ続ける理由を述べないこと。

STEP のその先へ

方程式 $\dot{y} = ky(1-y)$ はロジスティック方程式（logistic equation）であり、資源によって制限される成長を表す標準的なモデルである。ここで $y = 0$ と $y = 1$ は平衡解

（equilibrium solutions）であり、微分方程式の解の一意性定理（uniqueness theorem）によれば、他のどの解もこれらと交わったり接したりすることはない。これを使えば最後の小問をより鮮やかに片づけられる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、ロジスティック方程式とこの種の安定性解析が詳しく論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。