解答例

# STEP I 2003、第 7 問

純粋数学 • 数字と整除性

> **STEP I 2003、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q7

## 鍵となる考え方

$N = 100a + 10b + c$ と書いて $S = N$ とおくと、3 つの数字（digit）についての方程式が 1 つ得られる。これを

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

とまとめると、最初の段落で示した 2 つの事実がそのまま当てはまる。すなわち、$b$ の項は 0 と 25 の間に収まり、$99a$ と $c^3 - c$ はどちらも 3 の倍数である。1 つ目の事実から、$c^3 - c$ は 99 の倍数のすぐ上になければならない。2 つ目の事実によって、$b$ のとりうる値が絞られる。その後は、手で調べるべき場合がわずかに残るだけである。

## 解答

### 2 つの準備的な事実

平方完成（completing the square）すると、

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

$(5-k)^2 \geq 0$ であるから、$10k - k^2 \leq 25$ が得られる。また $0 \leq k \leq 9$ より $-4 \leq 5 - k \leq 5$ であるから、$(5-k)^2 \leq 25$ となり、したがって $10k - k^2 \geq 0$ である。（0 での等号は $k = 0$ のとき、25 での等号は $k = 5$ のときに成り立つ。）

次に、$k-1$、$k$、$k+1$ は連続する 3 つの整数であるから、そのうちちょうど 1 つが 3 の倍数である。よって、それらの積 $k(k-1)(k+1)$ は 3 で割り切れる。（これは $0 \leq k \leq 9$ に限らず、すべての整数 $k$ について成り立つ。）

### 数を求める

$N = 100a + 10b + c$ とし、各位の数字は $1 \le a \le 9$（$N \ge 100$ であるから）および $0 \le b, c \le 9$ を満たすとする。このとき $S = a + b^2 + c^3$ であり、

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \qquad (*) \end{aligned}$$

**考えてみよう** なぜ $10b - b^2$ を $99a$ と同じ辺に置くのか？

それは、この組み合わせこそ、先ほど評価の仕方を学んだものだからである。$t = 10b - b^2$ とおくと、1 つ目の事実から $0 \le t \le 25$ であり、一方 $99a$ は 25 よりずっと大きい 99 の倍数である。したがって $(*)$ は、$c^3 - c$ が 99 の倍数に小さな「余り」$t$ を加えたものであることを述べており、これによって状況はすぐに決まってしまう。

**$b$ を絞り込む。** 2 つ目の事実より、3 は $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$ を割り切り、また 3 は $99a$ を割り切る。よって $(*)$ より、3 は $t = b(10 - b)$ を割り切る。$10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$ であるから、これには $b \equiv 0$ または $b \equiv 1 \pmod 3$ が必要である。可能性は

| $b$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t = 10b - b^2$ | 0 | 9 | 21 | 24 | 24 | 21 | 9 |

であり、したがって $t \in \{0, 9, 21, 24\}$ である。（$b = 2, 5, 8$ のときは $t = 16, 25, 16$ となり、いずれも 3 で割り切れない。）

**$c$ を絞り込む。** $a \ge 1$ かつ $t \ge 0$ であるから、$(*)$ より $c^3 - c \ge 99$ である。$c^3 - c$ の値は

| $c$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^3 - c$ | 0 | 0 | 6 | 24 | 60 | 120 | 210 | 336 | 504 | 720 |

であるから、$c \ge 5$ である。

**場合分け。** 各 $c \ge 5$ について、範囲 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ に入る倍数 $99a$（ただし $1 \le a \le 9$）が必要であり、さらに $t = c^3 - c - 99a$ が $0, 9, 21, 24$ のいずれかでなければならない。

- $c = 5$：$c^3 - c = 120$。$[95, 120]$ に入る 99 の倍数は 99 のみであり、$a = 1$、$t = 21$ となるので、$b = 3$ または $b = 7$ である。これより $N = 135$ と $N = 175$ が得られる。
- $c = 6$：$c^3 - c = 210$。$[185, 210]$ に入る 99 の倍数は 198 のみであり、$a = 2$、$t = 12$ となる。しかし 12 は $0, 9, 21, 24$ のいずれでもない（実際、$10b - b^2 = 12$ は整数解をもたない）。解はない。
- $c = 7$：$c^3 - c = 336$。近くの倍数は 297 と 396 であり、どちらも $[311, 336]$ に入らない。解はない。

- $c=8$：$c^3-c=504$。$[479,504]$ に入る 99 の倍数は 495 のみであり、$a=5$、$t=9$ となるので、$b=1$ または $b=9$ である。これより $N=518$ と $N=598$ が得られる。
- $c=9$：$c^3-c=720$。近くの倍数は 693 と 792 であり、どちらも $[695,720]$ に入らない。解はない。

以上の各段階はすべて逆にたどれるので、これら 4 つは確かに $S=N$ を満たす。直接確かめると、

$$135:1+3^2+5^3=1+9+125=135,\quad 175:1+7^2+5^3=1+49+125=175,$$
$$518:5+1^2+8^3=5+1+512=518,\quad 598:5+9^2+8^3=5+81+512=598.$$

よって、$S=N$ を満たす数はちょうど

$$N=135,\quad 175,\quad 518,\quad 598.$$

である。

## 検算

3 桁の数 900 個すべてについて $a+b^2+c^3$ を計算する総当たり探索を行うと、ちょうど 135、175、518、598 が見つかり、場合分けの結果と一致する。構造に関するうまい検算もある。各組において、2 つの $b$ の値の和は 10 になっている（$3+7$ と $1+9$）。これは必然である。なぜなら、$b$ を $10-b$ に置き換えても $t=10b-b^2$ は変わらないからである。

## よくある間違い

- $a\geq 1$ を忘れ、000 や 001 のような 3 桁の数でない「解」を認めてしまう。
- 与えられた $a$ と $c$ に対して $b$ を 1 つ見つけたところで止めてしまう。$t(b)=t(10-b)$ であるから、解は対になって現れる。
- 3 で割り切れることだけを使い、評価 $0\leq t\leq 25$ を使わない。各 $c$ に対して可能な $a$ を高々 1 つに絞るのは、この評価である。

## STEP のその先へ

自分自身の各位の数字のべき乗から作った和に等しい数は、古典的な数学パズルの題材である（アームストロング数、あるいは「ナルシシスト数」（narcissistic numbers）と呼ばれる $153=1^3+5^3+3^3$ のような数が最もよく知られた族である）。その根底に

ある本格的な考え方は、ここで用いたものと同じである。すなわち、各辺の大きさを評価して探索を有限にし、次に合同式（congruence）を使ってそれを刈り込むのである。大きさの評価と剰余演算（modular arithmetic）を組み合わせるこの方法は、多くのディオファントス方程式（Diophantine equation）の解法の原動力となっている。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）は、合同式とその応用への優れた入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。