解答例

STEP I 2003、第 6 問

純粋数学 ・ 部分分数分解による積分

> **STEP I 2003、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの 2 次式も因数分解できるので、自然な道具は部分分数分解（partial fractions）である。「場合分け」が生じるのは、二つの 1 次因数が一致する瞬間である。そのとき部分分数分解は使えなくなり、代わりに完全平方式の逆数を積分することになる。小問 (ii) に取りかかる前に、二つの 2 次式をよく見比べてほしい。単純な変数の平行移動によって、一方がもう一方に変わるのである。

解答

小問 (i)

$2 \times a = 2a$ かつ $2 + a = a + 2$ であるから、この 2 次式は次のように因数分解できる。

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

$a > 0$ であるから、$0 \le x \le 1$ において二つの因数はともに正である。したがって被積分関数（integrand）は区間全体で連続（continuous）であり、すべての $a > 0$ に対して積分が存在する。二つの因数が等しくなるのはちょうど $a = 2$ のときであり、これが場合分けの境目となる。

$a \neq 2$ の場合。 二つの因数は異なり、

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

が成り立つ。これは通分して確かめられる。分子は $(x+a) - (x+2) = a - 2$ となる。

$[0,1]$ 上で $x+2$ と $x+a$ はともに正であるから、対数に絶対値記号は不要である。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big)\\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

考えてみよう $0<a<2$ のとき、係数 $\frac{1}{a-2}$ は負である。被積分関数が正である以上、答えは正でなければならないが、それでも答えは正になっているだろうか？

なっている。$\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$ であるから、$0<a<2$ のとき対数も負となり、商は正になる。同様に $a>2$ のときは両方とも正である。すべての部分を正の形で書きたければ、$0<a<2$ に対する答えを $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$ と書けばよい。これは同じ値である。

$a=2$ の場合。 このとき被積分関数は $(x+2)^{-2}$ であり、

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

小問 (ii)

ここでの 2 次式は $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$ であるが、同じ計算を繰り返す前に $u=x+1$ と置換してみよう。

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1 = x^2+(a+2)x+2a.$$

これはまさに小問 (i) の 2 次式である。また $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ であり、$u=1,2$ は $x=0,1$ に対応する。よって

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

となり、答えは小問 (i) と同じである。

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2,\\ \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

直接計算することもできる。$[1,2]$ 上では $u+1>0$ かつ $u+a-1\geq a>0$ であるから、被積分関数はやはり連続であり、二つの因数が一致するのはちょうど $a-1=1$、すなわち $a=2$ のときである。部分分数分解により $\frac{1}{a-2}[\ln\frac{u+1}{u+a-1}]_1^2 = \frac{1}{a-2}(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a})$ が得られ、これは同じ式である。

検算

- $a = 2$ **における連続性**。$a \to 2$ のとき対数は $\ln 1 = 0$ に近づくので、公式は $0/0$ の形になる。その極限（limit）は $a = 2$ における $\ln 3a - \ln(2a + 2)$ の微分係数（derivative）、すなわち $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ であり、特別な場合の値と一致する。二つの場合は、あるべき姿どおり滑らかにつながっている。
- **特別な値**。$a = 1$ のとき、(i) の被積分関数は $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ であり、公式は $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$ を与える。
- **数値的検証**。$a = 1$、$a = 2$、0 や 2 に近い a、および 20 以下のランダムな 200 個の a の値について、両方の積分にシンプソン（Simpson）の公式を適用すると、公式と 10^{-10} より高い精度で一致する。

よくある間違い

- 部分分数の係数 $\frac{1}{a-2}$ が定義されない $a = 2$ の場合を忘れる。
- 部分分数の符号を逆にしてしまう。通分して確かめること。
- $0 < a < 2$ と $a > 2$ を本質的に異なる答えとして扱う。符号に注意を払えば、一つの公式で両方を表せる。

STEP のその先へ

$a = 2$ における振る舞いは、除去可能特異点（removable singularity）の小さな例である。すなわち、ある点で定義されていないように見えるが、その点での極限がちょうど積分の値に等しくなる公式である。解析学では、パラメータに依存する積分がそのパラメータについて連続（あるいは微分可能）となるのはどのようなときかを学ぶ。それによって、二つの場合が一致しなければならなかった理由が説明される。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、極限、連続性、リーマン積分を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。