解答例

STEP I 2003、第 5 問

純粋数学 ・ 二項級数

> **STEP I 2003、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q5

鍵となる考え方

どの二項展開（binomial expansion）においても、一般項（general term）を書き下し、それが含む x の指数を追跡すればよい。定数項（constant term）とは、その指数が 0 となる項である。小問 (ii) では展開が有限ではないので、まず支配的な因数をくくり出す。$|x|$ が大きいときはそれは x^6 であり、残りは $3/x$ の級数となる。$|x|$ が小さいときは $3x^5$ であり、残りは $x/3$ の級数となる。そのうえで、x のどのような累乗が現れうるかを調べれば、すべてが決着する。

解答

小問 (i)

$(2x + x^{-2})^6$ の一般項は

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}(x^{-2})^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

である。これが x を含まないのはちょうど $6 - 3r = 0$、すなわち $r = 2$ のときであり、そのとき項は

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

となり、示すべき結果が得られる。

同様に、$(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$ の一般項は

$$\binom{5n}{r}(ax^3)^{5n-r}(bx^{-2})^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\, x^{15n-5r}.$$

である。x の指数が 0 となるのは $15n = 5r$ のとき、すなわち $r = 3n$ のときである（これは $0 \le r \le 5n$ を満たす）。したがって、x を含まない項は

$$\binom{5n}{3n} a^{2n} b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\, a^{2n} b^{3n}.$$

である。

小問 (ii)

$|x|$ **が大きい場合**。因数 x^6 をくくり出すと

$$f(x) = (x^6(1 + 3/x))^{1/2} = x^3\Big(1 + \frac{3}{x}\Big)^{1/2},$$

となる。ここでは問題の意図に従って $(x^6)^{1/2} = x^3$ とした（厳密にはこれは $|x|^3$ である。下の注を参照）。$|x| > 3$ のとき $|3/x| < 1$ であるから、$u = 3/x$ とおいた $(1+u)^{1/2}$ の二項級数（binomial series）は収束（converge）する：

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

ここで u^3 の係数は

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

である。級数に x^3 を掛けると、項 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$ は $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$ となるので、定数になるのは $k = 3$ のみである：

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

よって x を含まない項は $\frac{27}{16}$ であり、示すべき結果が得られる。

考えてみよう $x < -3$ のときはどうなるか？

平方根は非負の根を意味し、$(x^6)^{1/2} = |x|^3$ であって、これは $x < 0$ のとき $-x^3$ に等しい。したがって $x < -3$ では展開のすべての項の符号が反転し、定数項は $-\frac{27}{16}$ となる。示すべき結果 $\frac{27}{16}$ は $x > 3$ に対してはまさに正しい。$x < -3$ に対しては、$(x^6)^{1/2}$ を x^3 と読めば成り立ち、これが問題の意図であることは明らかである。

$|x|$ **が小さい場合**。このとき括弧内の支配的な項は $3x^5$ であるから、代わりにこれをくくり出す：

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\Big(1 + \frac{x}{3}\Big).$$

$f(x)$ が実数であるためには $x^5(x+3) \ge 0$ が必要である。$|x| < 3$ のとき因数 $x+3$ は正であるから、$x \ge 0$ が必要となる（$-3 < x < 0$ では、f はそもそも実関数として定

義されない)。$0 < x < 3$ に対して

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

であり、$|x/3| < 1$ であるからこの級数は収束する。すべての項は

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

の定数倍であり、$\frac{5}{2}+k$ は決して整数にならないので、特に 0 にもならない。したがって、$|x| < 3$ における $f(x)$ の x の累乗による展開には、x を含まない項は存在しない($x = 0$ そのものでは $f(0) = 0$ である)。

検算

- 正の大きな x に対して、$f(x) - \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x\right)$ は $\frac{27}{16} = 1.6875$ に近づくはずである。$x = 1000$ のとき電卓では 1.68434 となり、その差は級数の次の項 $-\frac{405}{128x} \approx -0.00316$ で説明がつく。
- 0 の近くでは $f(x) \approx \sqrt{3}\,x^{5/2}$ である。$x = 0.01$ のとき $f(0.01) = \sqrt{10^{-12} + 3\times 10^{-10}} \approx 1.734 \times 10^{-5}$ であり、$\sqrt{3}\times 10^{-5}$ に近く、0 でない定数に近づいているわけでは決してない。
- 一般の公式について、$n = 1$、$a = b = 1$ とすると $\binom{5}{3} = 10$ となり、これは $(x^3 + x^{-2})^5$ の定数項である。直接展開すれば確かめられる。

よくある間違い

- 一般項の指数を逆に書き、例えば $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$ としたうえで、r と二項係数(binomial coefficient)の対応を取り違える。どちらの番号づけでも、一貫していれば問題ない。
- $\binom{1/2}{3}$ の符号を誤る。負の因数が二つ $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$ あるので、正になる。
- 小さい x に対して $(x^6 + 3x^5)^{1/2}$ を x^6 をくくり出して展開する。これでは $3/x$ の級数となり、$|x| < 3$ では発散(diverge)してしまう。

STEP のその先へ

f の二つの展開は異なる領域で成り立ち、どの因数をくくり出すかによって、どの領域の展開が得られるかが決まる。これは関数を異なる点のまわりで展開するという考

え方であり、複素解析（complex analysis）におけるローラン級数（Laurent series）やピュイズー級数（Puiseux series、ここでの $x^{5/2+k}$ のような分数べきによる展開）へとつながる。$x < -3$ で符号の問題を引き起こした平方根の分枝（branch）も、複素解析の中心的なテーマである。Needham の *Visual Complex Analysis* は、その両方を図を用いて説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。