解答例

# STEP I 2003、第 4 問

純粋数学 ・ 三角不等式（三角関数）

> **STEP I 2003、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

## 鍵となる考え方

両辺に $\cos\theta$ を掛けたくなるところだが、$\cos\theta$ は $[0, 2\pi)$ において符号が変わり、負の数を掛けると不等式（inequality）の向きが逆になる。そこで $\cos\theta > 0$ の場合と $\cos\theta < 0$ の場合に場合分け（case analysis）する。$1 + \sin\theta$ は決して負にならないので、一方の場合は自明であることがわかる。もう一方の場合は、$\sin\theta - \cos\theta$ を $R\sin(\theta - \alpha)$ の形に合成（harmonic form）すれば、正弦についての一つの不等式に帰着する。

## 解答

$f(\theta) = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ とおく。以下つねに $0 \le \theta < 2\pi$ かつ $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ とする。

**場合 1：$\cos\theta < 0$、すなわち $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ のとき**

$\sin\theta \ge -1$ であるから、分子（numerator）$1 + \sin\theta$ は 0 以上であり、分母（denominator）は負である。よって $f(\theta) \le 0 < 1$ である。

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ に属する**すべての** $\theta$ が不等式を満たす。

**場合 2：$\cos\theta > 0$、すなわち $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ のとき**

正の数 $\cos\theta$ を掛けても不等式の向きは変わらないので、

$$f(\theta) \le 1 \iff 1 + \sin\theta \le \cos\theta \iff \sin\theta - \cos\theta \le -1.$$

ここで $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ であるから、条件は

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) \le -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

となる。

**考えてみよう** $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$ のどの値を調べればよいか？

この場合に許される二つの範囲だけを調べればよい。

- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ならば $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$ である。この区間で $\sin\phi$ は増加し、$\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であって、等号は $\phi = -\frac{\pi}{4}$ のときに限り成り立つ。よってここでの解は $\theta = 0$ のみである。（確認：$f(0) = 1/1 = 1$ であり、等号が成り立つ。）
- $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ならば $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$ である。$\sin\phi$ は両端で $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ に等しく、その間の $\phi = \frac{3\pi}{2}$ で $-1$ まで下がるので、この開区間（open interval）では $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。よって $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ に属する**すべての** $\theta$ が解である。

### まとめ

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ では $\cos\theta = 0$ となるので、この値は除外される。二つの場合を合わせると、不等式が成り立つのはちょうど

$$\theta = 0 \qquad \text{または} \qquad \tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{3\pi}{2} \qquad \text{または} \qquad \tfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

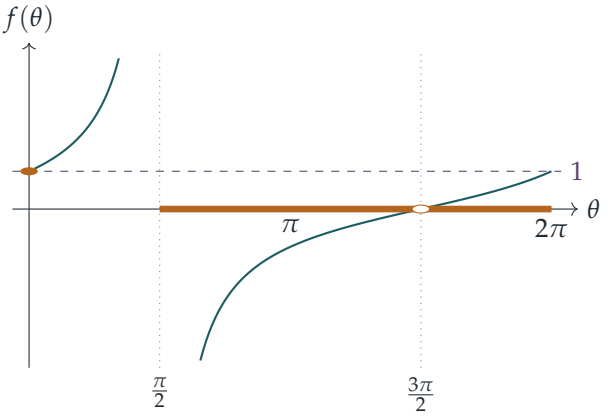
のときである。

### より鮮やかな見方

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$、$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$、$1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いると、

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

となる。ここで共通因数を約分したが、$\cos\theta \neq 0$ であるからこの因数は 0 でない。（$\theta = \pi$ では中央の式は定義されないが、最初の式と最後の式はそこでも等しい。）$\theta$ が $[0, 2\pi)$ を動くとき、$\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ は $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ を動く。$\tan\psi$ のグラフを見れば、$\tan\psi \le 1$ となるのは $\psi = \frac{\pi}{4}$ のときと $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$ のときに限ることがすぐにわかる。$\psi = \pi$（すなわち $\theta = \frac{3\pi}{2}$）を除けば、これは先ほどと同じ答えである。




解集合（琥珀色）は、曲線が破線 $f = 1$ 上またはその下にある部分である。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ の穴に注意せよ。そこでは $f(\theta) \to 0$ であるが、$f$ は定義されていない。

## 検算

- $\theta = 0$：$f(0) = 1$ であり、境界上にある。0 より少し大きいところでは分子は 1 を超え、分母は 1 未満であるから $f > 1$ となる。これにより $\theta = 0$ が孤立した解（isolated solution）であることが確かめられる。
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$：$f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$。よい。
- $\theta = \pi$：$f = 1/(-1) = -1 \leq 1$。よい。
- $[0, 2\pi)$ 内のランダムな $\theta$ を $2 \times 10^5$ 個試したところ、上で述べた解集合と完全に一致した。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ の近くでは $f \approx 5 \times 10^{-5}$ となり、$f \to 0$ と整合している。

## よくある間違い

- 場合分けをせずに $\cos\theta$ を両辺に掛けてしまうこと。こうするとあらゆる範囲で $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$ となり、区間 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 全体を誤って捨ててしまう。
- 孤立した解 $\theta = 0$ を忘れること。問題では $\theta = 0$ が許されており、等号の場合も含まれる。
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$ を含めてしまうこと。そこでは式は $\frac{0}{0}$ となるので、極限（limit）は 0 であっても、式自体は定義されない。

## STEP のその先へ

ここでの教訓は、不等式が保たれるのは**増加的な**操作、すなわち正の数を掛けること、増加関数（increasing function）を施すことなどに限られる、ということである。このことに気を配るのは、実解析（real analysis）の日常的な仕事である。$\theta = \frac{3\pi}{2}$ における除去可能な特異点（removable singularity）、つまり $f$ が極限をもつのに値をもたない点も、実解析のもう一つのテーマである。連続性（continuity）とは、極限と値が一致することにほかならない。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これら二つの考え方を丁寧に、かつ読みやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。