解答例

STEP I 2003、第 3 問

純粋数学 ・ 半角を用いた三角方程式

> **STEP I 2003、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

鍵となる考え方

各小問では、$\frac{1}{2}\theta$ の関数と θ の同じ関数とを比較している。そこで倍角の公式（double-angle formula）を用いて、すべてを半角（half-angle）で表す。すると各方程式は、ただ一つの量（$\sin\frac{1}{2}\theta$、$\tan\frac{1}{2}\theta$ または $\cos\frac{1}{2}\theta$）についての多項式（polynomial）の方程式となり、因数分解（factorise）するか二次方程式（quadratic equation）として解くことができる。注意すべき点は、半角の関数が実際にとりうる値の範囲と、関数が定義される範囲を見失わないことだけである。

解答

小問 (i)

$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ を用いると、方程式 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$ は

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{すなわち、} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta) = 0.$$

と同値である。よって、この方程式が成り立つのは $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ または $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ のとき、かつそのときに限る。

ところが $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ ならば $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1 - \cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$ であるから、いずれにせよ $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ となる。したがって二つ目の場合は一つ目の場合に含まれ、

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0$$

が示された。（言い換えれば、解はちょうど整数 n を用いて $\theta = 2n\pi$ と表されるものである。）

小問 (ii)

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とおく。方程式が意味をもつには $\tan\frac{1}{2}\theta$ と $\tan\theta$ がともに定義されている必要があるので、$\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ である。$\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ であるから、二つ目の条件は $t^2 \neq 1$ を意味する。これらの制限のもとで $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$ であり、方程式は

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

となる。0 でない $1-t^2$ を両辺に掛けると $2t - 2t^3 = 2t$ となるので、$t^3 = 0$、すなわち $t = 0$ である。

> **考えてみよう** $1-t^2$ を両辺に掛けてよいのか。また、それによって解を失ったり、余分な解が生じたりしていないか。

0 でない量を掛ける操作は逆にたどれるので、二つの正接がともに定義される範囲において、t についての方程式は $t = 0$ とちょうど同値である。逆に $t = 0$ のとき $\tan\theta = 0$ かつ $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ となり、両辺はともに 0 である。

さて、$\tan\frac{1}{2}\theta = 0$ となるのはちょうど $\frac{1}{2}\theta = n\pi$ のときである。よって解は

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

であり、小問 (i) と同じ集合になる。

小問 (iii)

$c = \cos\frac{1}{2}\theta$ とおく。$\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$ を用いると、方程式 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$ は

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

と同値である。c は余弦であるから $-1 \leq c \leq 1$ である。解 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$ は大きすぎるが、$\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$ は適する。よって、方程式が成り立つのは

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで ϕ は問題文で定義されたものである。$0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$ であり、cos は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で 1 から 0 まで減少するので、この ϕ は存在し、しかもただ一つである。

> **考えてみよう** $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$ を、与えられた形にどう変形すればよいか。

$-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$ と書く。$\cos x = \cos\alpha$ の一般解（general solution）は $x = 2m\pi \pm \alpha$ であるから、

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{すなわち、} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

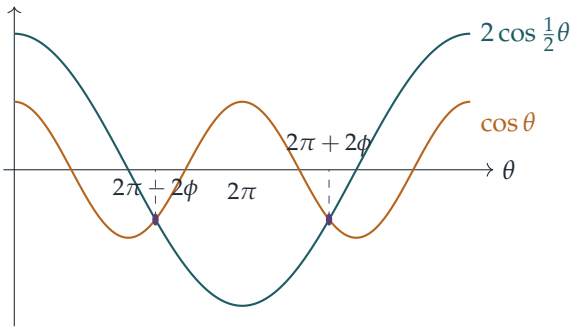
となる。二つの符号を別々に考える。

- $+$ の符号のとき：$n = m$ として $\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$ である。
- $-$ の符号のとき：$n = m - 1$ として $\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1) + 2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$ である。

m がすべての整数を動くとき、いずれの場合も n はすべての整数を動く。したがって

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi \quad \text{（ある整数）} \; n.$$

である。どの段階も同値変形であったから、両方向が証明された。逆を直接確かめておくと、$\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$ ならば $\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$ であり、これは $2c = 2c^2 - 1$ を満たす。



$2\cos\frac{1}{2}\theta$ の 1 周期分 $0 \le \theta \le 4\pi$ において、二つの曲線は 2 回交わり、その交点は $2\cos\frac{1}{2}\theta$ が最小値 -2 をとる $\theta = 2\pi$ に関して対称である。

検算

- 数値的には $\cos\phi \approx 0.3660$ から $\phi \approx 1.1961$ となるので、(iii) の最初の正の解は $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$ である。そこでは $2\cos\frac{1}{2}\theta \approx -0.7321$、$\cos\theta \approx -0.7321$ となり、確かに一致する。$[-6\pi, 6\pi]$ 上で $2\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\theta$ の根を探索すると、この範囲にある $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ の 6 個の値がちょうど見つかった。
- (ii) についても極（pole）を避けて同様に探索したところ、根は 2π の倍数にしか見つからなかった。
- (i) と (ii) の妥当性の確認：$\theta = \pi$ は $2\sin\frac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$ であるから (i) を満たさず、また (ii) では $\tan\frac{1}{2}\pi$ が定義されないので定義域（domain）の外にある。

よくある間違い

- (i) で、$\sin\frac{1}{2}\theta$ が 0 になりうることに触れずに約分してしまう。あるいは、$\cos\frac{1}{2}\theta = 1$ がすでに含まれていることに気づかず、別の解の族として挙げてしまう。
- (ii) で、分母を払う前に、$\tan\theta$ や $\tan\frac{1}{2}\theta$ が定義されない点を θ が避けなければならないことを忘れる。
- (iii) で、1 より大きい解 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ を残してしまう。あるいは、$4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$ を $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ の形に直す際に $\pm$ の扱いを誤る。

STEP のその先へ

各小問では、半角のただ一つの関数で置き換えることによって方程式を解いており、これにより三角方程式が代数方程式に変わる。(ii) の置換 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ はとりわけ強力である。これは $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ を t の有理関数（rational function）として表すので、大学 1 年の微分積分学で $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の任意の有理関数を積分するのに用いられる。幾何学的には、これは単位円（unit circle）を有理点によってパラメータ表示（parametrise）するものである。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、これらの考え方を用いた STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。