解答例

STEP I 2003、第 2 問

純粋数学 • 代数的恒等式

> **STEP I 2003、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q2

鍵となる考え方

受験者の答えが正しいのは、それが方程式を満たすときであり、かつそのときに限る。そこで、その答えを代入して分母を払う。すると各小問は、与えられた数に関する多項式（polynomial）の条件に帰着する。前半では、その条件は 0 でない実数に対しては決して 0 にならない二次形式（quadratic form）である。後半では、それは見事に因数分解（factorise）できる三次式であり、その因数がちょうど問題に現れる三つの等式になっている。

解答

前半の問題

以下では、a と b は 0 でない実数とする。受験者の答えが正しいのは、$x = a + b$ が方程式を満たすときであり、かつそのときに限る。そもそもこれが意味をもつためには $a + b \neq 0$ でなければならず、そのうえで

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

が成り立つ必要がある。0 でない $ab(a+b)$ を両辺に掛けると、これは

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{すなわち} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

と同値である。平方完成（completing the square）すると

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

となる。両項とも実数の平方であるからいずれも ≥ 0 であり、さらに $b \neq 0$ より第 2 項は正である。したがって、任意の実数 a と 0 でない任意の実数 b に対して $a^2 + ab + b^2 > 0$ であり、この条件が成り立つことは決してない。

($a + b = 0$ の場合、受験者の「答え」$x = 0$ は方程式の中で意味をもたないので、この場合も事情は変わらない。) よって、$x = a + b$ が正しくなるような a と b の値は存在しない。これが示すべきことであった。

後半の問題

今度は a、b、c は 0 でないとする。答え $x = a + b + c$ が正しいのは、$a + b + c \neq 0$ かつ

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc}.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る (if and only if)。両辺に $abc(a + b + c) \neq 0$ を掛けると、これは

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0. \qquad (*)$$

と同値である。

考えてみよう $(*)$ の左辺が因数分解できることには、どうすれば気づけるだろうか。

示すべき結果から、因数 $a + b$、$b + c$、$c + a$ が現れることが予想される。そのうち一つを試してみよう。$b = -a$ とおく。すると $a + b + c = c$、$ab + bc + ca = -a^2 - ac + ca = -a^2$ となるので、左辺は $c(-a^2) - (-a^2 c) = 0$ となる。よって $a + b$ は因数であり、対称性 (symmetry) から $b + c$ と $c + a$ も因数である。左辺の次数は 3 であるから、左辺は $(a + b)(b + c)(c + a)$ の定数倍である。$a^2 b$ の係数を比較すると (両辺とも 1 である)、その定数は 1 であることがわかる。あるいは、両辺を展開してもよい。

$$\begin{aligned}(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc &= a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 3abc - abc \\ &= a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b + 2abc \\ &= (a + b)(b + c)(c + a).\end{aligned}$$

したがって $(*)$ は

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

と同じである。

では、両方向を証明しよう。

答えが正しい場合。 このとき $a + b + c \neq 0$ かつ $(*)$ が成り立つので、$(a + b)(b + c)(c + a) = 0$ である。数の積が 0 になるのはいずれかの因数が 0 のときに限るから、$a + b = 0$、$b + c = 0$、$c + a = 0$ のうち少なくとも一つが成り立つ。

逆 (*converse*) **に**、これらのうち少なくとも一つが成り立つとする。対称性より $a+b=0$ としてよい。すると $a+b+c=c\neq 0$ であるから、受験者の答えはきちんとした o でない数であり、$(*)$ の因数分解した形が成り立つ。方程式から $(*)$ への変形は可逆であった（o でない数 $abc(a+b+c)$ を掛けただけである）から、$x=a+b+c$ は方程式を満たす。これは直接確かめることもできる。$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$ であるから、方程式は $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$ となり、その解は $x=c=a+b+c$ である。

以上より、受験者の答えが正しいのは、$a+b=0$、$b+c=0$、$c+a=0$ のうち少なくとも一つが成り立つとき、かつそのときに限る。 ■

この議論では、a、b、c が実数であることを一度も使っていない点に注意しよう。因数分解は代数的な恒等式（identity）であるから、この結果は o でない複素数（complex numbers）に対しても成り立つ。これに対して前半では、a と b が実数であることが本当に必要である。複素数の範囲では、$a^2+ab+b^2=0$ には $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ のような解が存在する。

検算

- $a=2$、$b=-2$、$c=5$ とすると、$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ かつ $a+b+c=5$ であるから、受験者は正しい。
- $a=b=c=1$ とすると、正しい答えは $x=\frac{1}{3}$ であるが、受験者は 3 と答える。実際、$(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$ である。
- $(a+b)(b+c)(c+a)$ を $a=1$、$b=2$、$c=3$ で計算すると $3\cdot 5\cdot 4=60$ となり、一方 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$ である。
- $|n|\leq 6$ かつ $d\in\{1,2,3\}$ であるような o でない有理数（rational number）n/d からなる 17 576 個のすべての三つ組について、厳密な分数計算を用いて両方向を網羅的に検証したところ、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$ と書いて止まってしまうこと。これでは正であることは示せない。平方完成すれば示せる。
- 後半で一方向しか証明しないこと。「かつそのときに限る」には両方向が必要であり、逆を示す際には $a+b+c\neq 0$ を確認しなければならない。
- 両辺に掛ける前に $abc(a+b+c)$ が o でないことを確認し忘れること。この確認こそが変形を可逆にしている。

STEP のその先へ

式 $(a+b)(b+c)(c+a)$ は対称多項式（symmetric polynomial）であり、$e_1 = a+b+c$、$e_2 = ab+bc+ca$、$e_3 = abc$ とおいたときの恒等式 $(a+b)(b+c)(c+a) = e_1e_2 - e_3$ は、対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）、すなわち「任意の対称多項式はこれらの基本対称式（elementary symmetric polynomials）の多項式で表せる」という定理の一例である。同じ e_1、e_2、e_3 は、符号を除けば a、b、c を解とする三次方程式の係数であり、それゆえ方程式論（theory of equations）の至るところに現れる。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）はこうした観点から多項式環（polynomial ring）を論じており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、因数分解を見抜く STEP の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。