解答例

STEP I 2003、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布の期待値

> **STEP I 2003、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q13

鍵となる考え方

前半では、各チームのゴール数ではなく**失敗**の回数を数える。各チームが 5 本ずつ蹴り終えた時点で両チームが同点であるのは、失敗の回数が等しいときであり、そのときに限る。期待値については、サドンデス（sudden death）の段階が 2 本 1 組の「ラウンド」で進み、各ラウンドが同じ確率で PK 戦（shoot-out）を終わらせる独立な試行であることに注目する。したがってラウンド数は幾何分布（geometric distribution）に従い、キック数の期待値は「必ず蹴る 10 本」と「追加の本数に、それが必要になる確率を掛けたもの」の和に分解される。

解答

モデルの意図どおり、すべてのキックは互いに独立であり、チーム A は常に確率 p_A で、チーム B は常に確率 p_B で得点すると仮定する。$q_A = 1 - p_A$、$q_B = 1 - p_B$ とおく。

10 本終了時に同点である確率 α

チーム A が最初の 5 本のうち失敗する本数を X、チーム B が失敗する本数を Y とする。各チームの 5 本のキックは失敗確率の等しい独立な試行であるから

$$X \sim \mathrm{B}(5, q_A), \qquad Y \sim \mathrm{B}(5, q_B),$$

であり、両チームのキックが独立であるから X と Y も独立である。

チーム A のゴール数は $5 - X$、チーム B のゴール数は $5 - Y$ であるから、同点となるのは $X = Y$ のときであり、そのときに限る。$i = 0, 1, \ldots, 5$ に対する事象 $\{X = Y = i\}$

は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}\alpha = \mathrm{P}(X=Y) &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=i)\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} q_A^i p_A^{5-i} \binom{5}{i} q_B^i p_B^{5-i}\\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (1-p_A)^i (1-p_B)^i\, p_A^{5-i} p_B^{5-i},\end{aligned}$$

となり、これが求める式である。（代わりにゴール数を数え、両チームとも $5-i$ ゴールとしても、$\binom{5}{i} = \binom{5}{5-i}$ であるから同じ和が得られる。）

キック数の期待値

10 本終了時にまだ同点であれば、サドンデスの段階は**ラウンド**ごとに進む。各ラウンドでは A が 1 本、B が 1 本蹴る。2 本のうちちょうど 1 本が決まったときにそのラウンドで決着がつき、その確率は

$$p_A q_B + q_A p_B = p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A) = p_A + p_B - 2p_A p_B = \beta.$$

である。そうでなければ（両方とも決めるか、両方とも外せば）次のラウンドが行われる。$\beta > 0$ である必要があり、つまり、どのラウンドでも決着がつき得ない自明な場合 $p_A = p_B = 0$ および $p_A = p_B = 1$ は除外する。

考えてみよう なぜ PK 戦はラウンドの途中で終わることがないのか。

ルールでは、一方が得点し他方が得点していないとき、両チームは同じ本数を蹴り終えていなければならない。A が外しても、B は自分のキックを蹴らなければならない（B も外すかもしれない）。したがってサドンデスのキックは常に 2 本 1 組であり、総数は $10 + 2R$ となる。ここで R は行われたラウンド数である（最初の 10 本で決着がつけば $R = 0$）。

サドンデスに入ったという条件のもとでは、各ラウンドは確率 β で決着がつく独立な試行であるから、R は幾何分布に従う：

$$\mathrm{P}(R = k \mid 10\text{ 本終了時に同点}) = (1-\beta)^{k-1}\beta, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

その平均は

$$\mathrm{E}(R \mid 10\text{ 本終了時に同点}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta(1-\beta)^{k-1} = \beta \cdot \frac{1}{(1-(1-\beta))^2} = \frac{1}{\beta},$$

である。ここで $|x| < 1$ に対する $\sum_{k\geq 1} k x^{k-1} = (1-x)^{-2}$ を用いた。$0 < \beta \leq 1$ であるからこれは適用できる。

最初の 10 本で決着がつけば $R = 0$ である。10 本終了時に同点かどうかで条件付けると

$$\mathrm{E}(R) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + (1-\alpha)\cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

よって、キック数の期待値は

$$\mathrm{E}(10 + 2R) = 10 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- 互角のチームで $p_A = p_B = \frac{1}{2}$ の場合：ヴァンデルモンドの恒等式（Vandermonde's identity）により $\sum_i \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5} = 252$ であるから、$\alpha = 252/2^{10} = \frac{63}{256}$、また $\beta = \frac{1}{2}$ である。キック数の期待値は $10 + \frac{63}{64} = \frac{703}{64} \approx 10.98$ となる。
- 一方のチームが完璧で他方がまったく決められない場合（$p_A = 1$、$p_B = 0$）、$\alpha = 0$ となる（残り得るのは $i = 0$ の項だけであり、それは $p_B^5 = 0$ を含む）。したがってキックはちょうど 10 本であり、常識と合致する。
- α の式を最初の 10 本の全 2^{10} 通りの結果の直接列挙と照合し、$10 + 2\alpha/\beta$ を 2×10^5 回の PK 戦のシミュレーションと照合した。$p_A = \frac{3}{4}$、$p_B = \frac{2}{3}$ のとき、公式は 11.264、シミュレーションは 11.25 を与えた。

よくある間違い

- β を A がラウンドに勝つ確率 $p_A(1 - p_B)$ としてしまう。PK 戦はどちらか一方のチームがラウンドに勝てば終わる。
- サドンデスが起こるのは確率 α のときだけであることを忘れ、答えを $10 + 2/\beta$ としてしまう。
- サドンデスの 1 段階あたりのキックを 2 本ではなく 1 本と数えてしまう。

STEP のその先へ

$\mathrm{E}(R) = \alpha\,\mathrm{E}(R \mid \text{同点}) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(R \mid \text{同点でない})$ という段階は全期待値の法則（law of total expectation）であり、大学 1 年の確率論で最も有用な道具の一つである。また、サドンデスの段階は吸収状態（absorbing state）をもつ単純なマルコフ連鎖（Markov chain）でもあり、ここでの「吸収までの期待時間」の計算はランダムウォーク（random

walk）や破産問題（gambler's ruin）へと一般化される。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、条件付き期待値とこれらの連鎖の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。