解答例

STEP I 2003、第 11 問

力学 ・ 斜面上での衝突

> **STEP I 2003、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q11

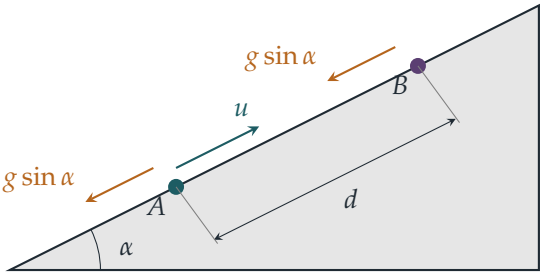
鍵となる考え方

滑らかな（smooth）斜面上では、どの粒子も速度によらず、最大傾斜線（line of greatest slope）に沿って下向きに同じ加速度 $g\sin\alpha$ をもつ。したがって重力は 2 つの粒子の**相対運動**（relative motion）を変えることができない。一方の粒子から見ると、もう一方は等速度で運動する。このおかげで衝突の時刻は容易に求まり、面倒な運動学の計算をせずに衝突時の相対速度もわかる。衝突による運動エネルギーの損失はこの相対速度だけで決まる。α、g、d がすべて答えから消えるのはそのためである。

解答

モデル

2 つの粒子を、A と B を通る最大傾斜線に沿って運動する質点（point mass）として扱う。斜面は滑らかなので、各粒子にはたらく力は重力と垂直抗力（normal reaction）だけである。斜面に垂直な方向に力を分解すると、垂直抗力は $mg\cos\alpha$ とつり合う。斜面に沿った方向に分解すると、各粒子は斜面下向きに加速度 $g\sin\alpha$ をもつ。A から斜面に沿って上向きに測った距離を x とする。



衝突の時刻

$a = g\sin\alpha$ とおく。斜面上向きを正とすると、A から出発する粒子（P とよぶ）と B から出発する粒子（Q とよぶ）の位置は

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

である。両者の間隔は

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

となる。$\frac{1}{2}at^2$ の項が打ち消し合うからである。間隔は d から一定の割合で縮まり、ちょうど

$$t = \frac{d}{u},$$

のときに 0 になる。これが示すべきことであった。この打ち消し合いこそが鍵となる考え方のはたらきである。2 つの粒子は同じように斜面を落ちていくので、効いてくるのは最初の相対的な速さ u だけなのである。

運動エネルギーの損失

$t = d/u$ における斜面上向きの速度は

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

である。簡単のため $w = ad/u$ とおく。すると $v_P = u - w$、$v_Q = -w$ であり、P は相対的な速さ $v_P - v_Q = u$ で Q に近づく。

考えてみよう 重力がはたらいているのに、なぜ運動量保存則（conservation of momentum）を使ってよいのだろうか？

衝突は瞬間的に起こる。衝突のごく短い時間の間、有限の大きさの重力と垂直抗力が与える力積（impulse）は、粒子どうしの間にはたらく大きな力積に比べて無視できる。したがって衝突において、斜面に沿った方向の運動量は保存される。

衝突後の斜面上向きの速度を v'_P、v'_Q とする。質量が等しいので、運動量保存則より

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

が成り立つ。ニュートン（Newton）の実験法則（Newton's experimental law）により、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

v'_P と v'_Q を個別に求める代わりに、恒等式

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}[(p+q)^2 + (p-q)^2].$$

を用いる。これを衝突の前後に適用すると、運動エネルギー（kinetic energy）の総和は

$$\text{衝突前の運動エネルギー} = \tfrac{1}{2}m(v_P^2 + v_Q^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + u^2],$$
$$\text{衝突後の運動エネルギー} = \tfrac{1}{2}m(v_P'^2 + v_Q'^2) = \tfrac{1}{4}m[(u-2w)^2 + e^2u^2],$$

となる。ここで衝突後の和と差には (1) と (2) を用いた。和の項は両者で等しいので

$$\text{運動エネルギーの損失} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2(1-e^2),$$

となり、求める結果が得られた。

考えてみよう $(u-2w)^2$ の項は物理的に何を表し、なぜ変化しないのだろうか？

$v_P + v_Q$ の半分は重心（centre of mass）の速度である。項 $\frac{1}{4}m(u-2w)^2$ は、全質量 $2m$ がその速度で運動するときの運動エネルギーであり、運動量保存則によって一定に保たれる。失われうるのは重心に対する相対運動の運動エネルギーだけであり、それは相対的な速さ、すなわち衝突前の u と衝突後の eu だけで決まる。

検算

- $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））ならば損失は 0 であり、当然そうなるべき結果である。$e = 0$ ならば衝突後に 2 つの粒子は一体となって運動し、損失は相対運動の運動エネルギー全体である $\frac{1}{4}mu^2$ になる。
- $\alpha = 0$ ならば斜面は水平で、Q は静止したままであり、P は時間 d/u 後に速さ u で Q に達する。これも結果と一致する。
- 数値で確かめる。$\alpha = 30°$、$g = 9.8$、$d = 2$、$u = 4$、$e = \frac{1}{2}$、$m = 1$ とすると、$t = 0.5$ における速度は 1.55 と -2.45 である。衝突後はそれぞれ -1.45 と 0.55 になり、運動エネルギーは 4.2025 から 1.2025 に減る。損失は 3 で、これは $\frac{1}{4}\cdot 16 \cdot \frac{3}{4}$ に等しい。運動を数値的に追跡した 1000 通りのランダムな検証でも一致した。

よくある間違い

- 衝突時の Q の速度を 0 としてしまう。P が減速してきたのと同じく、Q も時間 d/u の間斜面を滑り下りてきている。
- ニュートンの法則で符号を間違える。2 つの速度を同じ正の向きで書き、そのうえで遠ざかる速さ $= e \times$ 近づく速さとすること。
- v'_P と v'_Q を完全に求めてから 4 つの平方を展開してしまう。それでも解けるが、和と差の恒等式を使えば計算のほとんどを省ける。

STEP のその先へ

どちらの小問も、重心系への変換の例になっている。一様な重力場はすべての粒子に同じ加速度を与えるので、相対運動からは完全に消える。また、どんな系の運動エネルギーも、重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動の運動エネルギーの和に分解される（ケーニッヒの定理（König's theorem））。2 体問題では後者は $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$ であり、$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ は換算質量（reduced mass）で、ここでは $\frac{1}{2}m$ である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この 2 つの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。