解答例

STEP I 2003、第 10 問

力学 ・ 薄板の質量中心

> **STEP I 2003、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q10

鍵となる考え方

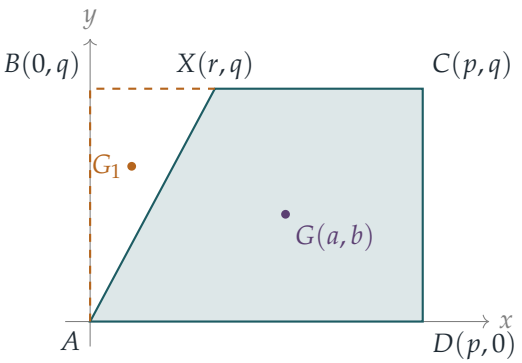
一部を切り取った図形は**引き算**で扱うのがよい。すなわち、各軸に関する長方形のモーメント（moment）は、台形（trapezium）のモーメントと三角形のモーメントの和に等しく、質量は面積に比例する。つり下げについては、一点から自由につり下げられた薄板（lamina）は、重心（centre of gravity）がその点の真下に来る位置で静止する。したがって直線 AG は鉛直になる。すると 45° という条件は、a と b の間のきわめて簡単な関係に帰着する。

解答

薄板は一様で薄いものとしてモデル化する。したがって、どの部分の質量もその面積に比例し、三角形の重心はその図心（centroid、すなわち頂点の平均）にある。

重心

与えられた座標軸のもとで $A = (0,0)$、$D = (p,0)$、$C = (p,q)$ であり、したがって $B = (0,q)$ である。X は BC 上にあって $BX = r$ であるから、$X = (r,q)$ である。ただし $0 \leq r \leq p$ である。



3 つの部分は次のとおりである。

- 長方形 $ABCD$：面積 pq、重心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$。
- 三角形 ABX（取り除く部分）：面積 $\frac{1}{2}qr$、重心 G_1 は $(0,0)$、$(0,q)$、(r,q) の平均であり、$(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$ である。
- 残る台形 $AXCD$：面積 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$、重心 $G = (a,b)$。

各軸に関する長方形のモーメントは、その 2 つの部分のモーメントの和である。y 軸に関するモーメントをとる（つまり x 座標を比較する）と、

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

両辺を $\frac{q}{2}$ で割ると $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$ となり、$2p - r \geq p > 0$ であるからこれで割ってよい。よって

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

同様に、x 軸に関して

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

であるから $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$ となり、

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

簡単な検算として、$r = 0$（何も切り取らない）とすると $a = \frac{p}{2}$、$b = \frac{q}{2}$ となり、長方形の中心が得られる。

A からつり下げる

薄板が A から自由につり下げられて平衡（equilibrium）にあるとき、薄板にはたらく力は 2 つだけである。G を通る重力と、A における抗力である。つり合っている 2 力は同一直線上にはたらかなければならないので、G は A の鉛直真下にある。

考えてみよう 「AD は水平から下向きに 45° をなす」という条件は、どのようにして a と b の方程式になるだろうか。

AG は鉛直であり、AD は水平と 45° をなすから、AD は AG とも 45° をなす。すなわち、角 GAD は 45° である。いまの座標軸では AD は x 軸の正の部分であり、$G=(a,b)$ は $a,b>0$ を満たす（台形の内部にあるから）。よって $\tan\angle GAD = b/a$ である。したがって $b/a=1$、すなわち

$$a=b.$$

上の式を用い、共通の正の分母 $3(2p-r)$ を払うと、

$$\begin{aligned} & 3p^2-r^2=q(3p-2r) \\ \iff\quad & r^2-2qr+3pq-3p^2=0. \end{aligned}$$

2 次方程式の解の公式（quadratic formula）により、

$$r=q\pm\sqrt{q^2-(3pq-3p^2)}=q\pm\sqrt{q^2-3pq+3p^2}.$$

根号の中は $(q-\frac{3}{2}p)^2+\frac{3}{4}p^2>0$ であるから、2 つの解はともに実数で相異なる。$s=\sqrt{q^2-3pq+3p^2}>0$ とおく。

符号の選択。 X は長さ p の辺 BC 上にあるので、$0\le r\le p$ でなければならない。解 $q+s$ はつねに p より大きいことを示す。

- $q\ge p$ ならば、$s>0$ であるから $q+s>q\ge p$ である。
- $q<p$ ならば、$p-q>0$ であり、

  $$s^2-(p-q)^2=(q^2-3pq+3p^2)-(p^2-2pq+q^2)=2p^2-pq=p(2p-q)>0,$$

  である。$q<p<2p$ だからである。よって $s>p-q$ であり、したがって $q+s>p$ である。

いずれの場合も、プラスの符号をとると X は C を越えて薄板の外に出てしまうので、不適である。したがって

$$r=q-\sqrt{q^2-3pq+3p^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

補足しておくと、この解が実際に $[0,p]$ に属するのは、ちょうど $p\le q\le 2p$ のときである。実際、$q-s\ge 0 \iff q^2\ge s^2 \iff 3p(q-p)\ge 0 \iff q\ge p$ であり、また（$q>p$ のとき）$q-s\le p \iff (q-p)^2\le s^2 \iff p(2p-q)\ge 0 \iff q\le 2p$ である。したがって、問題の状況はこのような形の場合にしか起こらない。これは直観と

も合っている。切り取りのない正方形（$q = p$、$r = 0$）は頂点からつり下げると対角線が鉛直になり、反対の極端な場合（$q = 2p$、$r = p$）には図形は直角三角形 ACD となり、その重心 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$ もやはり $a = b$ を満たす。

検算

- $r = 0$ とおくと長方形の中心 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$ が得られ、$r = p$ とおくと三角形 ACD の重心 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$ が得られる。
- $p = 1$、$q = 1.5$ のとき、公式から $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$ となり、このとき $a = b \approx 0.634$ であるから、確かに AG は AD と $45°$ をなす。もう一方の解 ≈ 2.37 は $p = 1$ を超える。
- 重心の公式については、ランダムに選んだ何千組もの p, q, r について、一般の多角形の重心公式とも照合した。

よくある間違い

- 三角形の重心を $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$ としてしまう。三角形の頂点のうち 2 つは高さ q にあるので、重心の高さは $\frac{2q}{3}$ である。
- 三角形のモーメントを引くべきところで足してしまう。台形は長方形から三角形を引いたものである。
- 「r は小さくなければならない」という曖昧な理由でプラスの符号を捨ててしまう。本当の理由は $r \leq p$ であり、それには $q \geq p$ かどうかで場合分けした短い議論が必要である。

STEP のその先へ

引き算による質量中心（centre of mass）の計算は、$\iint x \, \mathrm{d}A / \iint \mathrm{d}A$ を計算することの離散版であり、大学では同じ考え方に二重積分（double integrals）を用いて、密度が一様でない薄板や立体について出会うことになる。つり下げの条件は、ある一般原理の最も簡単な場合である。すなわち、一点を支点とする剛体（rigid body）は、質量中心が支点の真下にあるとき、つまり位置エネルギー（potential energy）が最小となるときに安定平衡（stable equilibrium）にある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、質量中心と剛体のつり合いを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。