解答例

STEP I 2003、第 1 問

純粋数学 • 累乗の和

> **STEP I 2003、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

鍵となる考え方

答えの形、すなわち係数が未知である n の多項式（polynomial）であることは問題文で与えられているので、残る仕事はその係数を決定することだけである。すべての n で成り立つ多項式の恒等式（identity）は、当然いくつかの都合のよい n の値でも成り立ち、各値から一次方程式が一つずつ得られる。和を負の添字から始めるのは意図的な工夫である。これにより $n=-1$ や $n=-2$ のような小さな値を使えるようになり、方程式がうまく対称的な形になる。

解答

問題文では r が和をとる変数としても係数としても使われている。この衝突を避けるため、和の変数を k と書き、p,q,r,s および a,b,c,d,e は係数のために残しておく。

平方の和

$S(n)=\sum_{k=-1}^{n} k^2$ とおくと、

$$S(n)=pn^3+qn^2+rn+s.$$

$k=-1$ から始まる和はすべての $n\geq -1$ に対して意味をもち、

$$S(-1)=1,\qquad S(0)=1+0=1,\qquad S(1)=1+0+1=2,\qquad S(2)=1+0+1+4=6.$$

である。与えられた形に $n=-1,0,1,2$ を代入すると、次の四つの方程式が得られる。

$$-p+q-r+s=1, \tag{1}$$
$$s=1, \tag{2}$$
$$p+q+r+s=2, \tag{3}$$
$$8p+4q+2r+s=6. \tag{4}$$

(2) より $s=1$ であるから、(1) と (3) はそれぞれ $-p+q-r=0$、$p+q+r=1$ となる。これらを加えると $2q=1$ となるので $q=\frac{1}{2}$ であり、したがって $p+r=\frac{1}{2}$ である。方程式 (4) は

$$8p+2+2r+1=6 \quad\Longrightarrow\quad 8p+2r=3 \quad\Longrightarrow\quad 6p+2(p+r)=3,$$

となるので $6p=2$ であり、$p=\frac{1}{3}$、$r=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ を得る。ゆえに

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n+1.$$

考えてみよう 問題が求めているのは $k=0$ からの和であるが、ここで求めたのは $k=-1$ からの和である。両者はどう違うか。

両者の違いは $k=-1$ の項、すなわち $(-1)^2=1$ だけである。よって

$$\sum_{k=0}^{n} k^2=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n=\tfrac{1}{6}n\left(2n^2+3n+1\right)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

となり、求める結果が得られた。

立方の和

次に $T(n)=\sum_{k=-2}^{n}k^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e$ とおく。未知数が五つあるので、$n=-2,-1,0,1,2$ の五つの値を用いる。

$$T(-2)=-8,\quad T(-1)=-9,\quad T(0)=-9,\quad T(1)=-8,\quad T(2)=0.$$

これより

$$16a-8b+4c-2d+e=-8, \tag{5}$$
$$a-b+c-d+e=-9, \tag{6}$$
$$e=-9, \tag{7}$$
$$a+b+c+d+e=-8, \tag{8}$$
$$16a+8b+4c+2d+e=0. \tag{9}$$

を得る。(7) より $e=-9$ である。方程式は $\pm n$ で対になっているので、各対の和と差をとるのが得策である。そうすると偶数次の項と奇数次の項が分離する。

$e=-9$ を用いると、(6) と (8) はそれぞれ $a-b+c-d=0$、$a+b+c+d=1$ となる。和と差をとると

$$a+c=\tfrac{1}{2}, \qquad b+d=\tfrac{1}{2}.$$

同様に、(5) と (9) はそれぞれ $16a-8b+4c-2d=1$、$16a+8b+4c+2d=9$ となる。和と差をとると

$$32a+8c=10, \qquad 16b+4d=8,$$

すなわち $16a+4c=5$、$4b+d=2$ である。$c=\frac{1}{2}-a$ を代入すると $12a+2=5$ となるので、$a=\frac{1}{4}$、$c=\frac{1}{4}$ である。$d=\frac{1}{2}-b$ を代入すると $3b+\frac{1}{2}=2$ となるので、$b=\frac{1}{2}$、$d=0$ である。ゆえに

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2-9.$$

$k=-2$ からの和は、$k=0$ からの和に比べて余分な項 $(-2)^3+(-1)^3=-9$ を含むので、9 を加えると

$$\sum_{k=0}^{n} k^3=\tfrac{1}{4}n^4+\tfrac{1}{2}n^3+\tfrac{1}{4}n^2=\tfrac{1}{4}n^2\left(n^2+2n+1\right)=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

となり、求める結果が得られた。

検算

$n=10$ のとき、公式からは $\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=385$ と $\frac{1}{4}\cdot 100\cdot 121=3025$ が得られ、$0^2+1^2+\cdots+10^2$ と $0^3+1^3+\cdots+10^3$ を直接計算しても同じ値になる。また、$3025=55^2=(0+1+\cdots+10)^2$ であることにも注目しよう。最初の n 個の立方の和は、最初の n 個の整数の和の平方に等しいのである。さらに、両方の公式が 0 から 59 までのすべての n で厳密に成り立つことをコンピュータで確認した。

よくある間違い

- 計算した和から問題が求める和へ移るときに、$k=-1$ の項（あるいは $k=-2$ と $k=-1$ の項）を忘れてしまう。$(-2)^3+(-1)^3=-9$ であって、$+9$ ではないことに注意せよ。
- 立方の和で n の値を四つしか使わずに済ませようとする。未知数が五つあれば方程式も五つ必要である。

- 係数 r と、問題文中の和の変数 r を混同する。どちらか一方の名前を付け替えれば誤りを防げる。

STEP のその先へ

なぜ答えが次数の一つ高い多項式であると仮定してよいのだろうか。それは、$m+1$ 次の多項式の差分 $P(n)-P(n-1)$ は m 次になるので、差分が n^m となる多項式を常に解として求めることができるからである。これが**差分法**（calculus of finite differences）の出発点であり、一般の場合に現れる係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）によって支配される（ファウルハーバーの公式（Faulhaber's formula））。ここで用いた、いくつかの点での値から多項式を決定する方法は**多項式補間**（polynomial interpolation）であり、数値解析においてラグランジュ補間（Lagrange interpolation）として再び登場する。この種の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。