解答例

STEP III 2002、第 9 問

力学 ・ 質量中心と転倒

STEP III 2002、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q9

鍵となる考え方

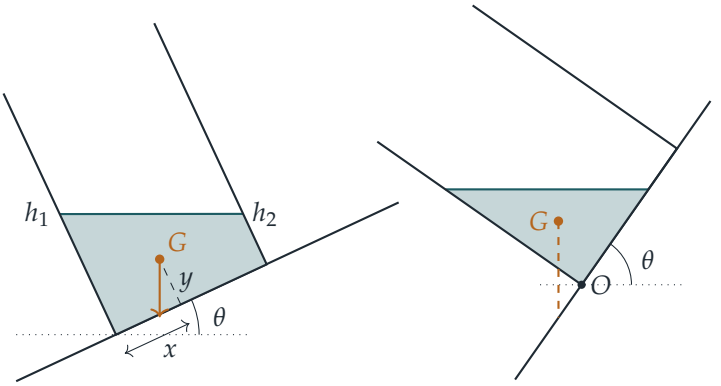
流体の自由表面（free surface）は水平であるから、（角 θ だけ傾いた）容器に固定した座標で見ると、底面に対して角 θ で傾いた直線になる。したがって、流体の断面（cross-section）は、表面が両側の壁に達する場合は台形（trapezium）、上側の壁に達する前に底面に達する場合は直角三角形となる。重心（centre of mass）を求めることは、二次元の図心（centroid）の計算に帰着する。転倒（toppling）については、容器は軽いので、すべては流体の重心を通る鉛直線が斜面とどこで交わるかによって決まる。

解答

設定

容器は壁の厚さが無視できる軽い角柱（prism）、流体は容器に対して静止している一様な連続体、斜面は滑りを防ぐのに十分粗いものとしてモデル化する。底面の水平な辺に垂直な鉛直断面はどれも同じであり、流体は一様であるから、流体の重心は一つの断面の図心である。その断面の幅は a、面積は $ka^3/a = ka^2$ である。

下側の側壁から底面に沿って（斜面の上向きに）X をとり、底面に垂直に Y をとる。X が増えるにつれて底面は水平面に対して角 θ で上がっていくので、水平な表面は底面に対して角 θ で下がっていく。すなわち、底面からの表面の高さは X が 1 増えるごとに $\tan\theta$ だけ減る。幅全体での高さの減少量を $d = a\tan\theta$ とおく。



左図は $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合（流体が両方の壁に接している）、右図は $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ かつ $\theta > 45°$ の場合であり、後者では G を通る鉛直線が底面を外れる。

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合

下側の壁と上側の壁での深さをそれぞれ h_1、h_2 とする。このとき $h_1 - h_2 = d$ であり、台形の面積は $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$ であるから $h_1 + h_2 = 2ka$ である。よって

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta),$$

となり、これが正となるのはちょうど $k > \frac{1}{2}\tan\theta$ のときである。したがって、これは表面が両方の壁に達する場合である。

台形を、$a \times h_2$ の長方形と、その上に乗る、直角をはさむ辺が a（$Y = h_2$ に沿う）と d（下側の壁に沿って上向き）の直角三角形とに分ける。

- 長方形：面積 ah_2、図心 $\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\right)$。
- 三角形：頂点は $(0, h_2)$、(a, h_2)、$(0, h_2 + d)$ であるから、面積は $\frac{1}{2}ad$、図心（頂点の平均）は $\left(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\right)$。

全面積を ka^2 として、下側の壁のまわりのモーメント（moment）をとると

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

ka で割り、$d = a\tan\theta$ を用いると

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

底面のまわりのモーメントをとると

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\left(h_2 + \tfrac{1}{3}d\right),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

ここで $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$、$h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$ であるから $h_2(h_2+d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$ となり

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

ka^2 で割ると

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

となり、求める結果が得られる。

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$ の場合

このとき h_2 は負になってしまうので、表面は下側の壁から距離 $b < a$ のところで底面と交わり、流体の断面は、直角をはさむ辺が底面に沿う b と下側の壁に沿う h の直角三角形になる。表面の傾きから $h = b\tan\theta$、面積から $\frac{1}{2}bh = ka^2$ である。よって $b^2\tan\theta = 2ka^2$ となり

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

（実際、$b < a$ となるのはまさに $2k < \tan\theta$ だからである。容器は十分高いので、h は問題を生じない。）三角形の図心は直角をはさむ各辺に沿って 3 分の 1 の位置にあるから

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

$k = \frac{1}{2}\tan\theta$ では、どちらの組の公式も $x/a = \frac{1}{3}$、$y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$ を与えるので、二つの場合はつながっている。

転倒

考えてみよう 手を離した瞬間に容器が倒れるかどうかは、何によって決まるか？

容器は軽いので、重さは流体の重さだけであり、それは重心 G を通って鉛直に作用する。斜面が押すことができるのは底面だけなので、垂直抗力（normal reaction）は底面上のどこか、下側の辺 O と上側の辺の間に作用する。G を通る鉛直線が O よりも斜面の下側で斜面と交わるならば、重力は O のまわりに、このような抗力では釣り合わせることのできないモーメントをもち、容器は O のまわりに回転する。すなわち転倒する。

O を原点とし、斜面の上向きに x、斜面に垂直に y をとる。この座標軸で鉛直下向きの方向の成分は $(-\sin\theta, -\cos\theta)$ であるから、$G = (x, y)$ から鉛直線に沿って距離 $y\sec\theta$ だけ下ると、斜面上の点

$$x - y\tan\theta.$$

に達する。したがって、$x < y\tan\theta$ ならば容器は転倒する。

$k < \frac{1}{2}$ かつ $\theta > 45°$ と仮定する。このとき $\tan\theta > 1 > 2k$ であるから $k < \frac{1}{2}\tan\theta$ となり、三角形の場合にあたる。このとき

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

である。$\tan\theta > 1$ だからである。よって $x < y\tan\theta$ であり、G を通る鉛直線は下側の辺よりも下を通るので、$k < \frac{1}{2}$ の値によらず容器は転倒する。（三角形の場合、同じ計算から $\theta < 45°$ ならば容器は安定であることがわかるので、そこではちょうど $45°$ が境目である。）これが求める結果である。条件 $k < \frac{1}{2}$ は、$\theta > 45°$ のときに三角形の場合になることを保証するためのものである。

検算

- $\theta = 0$ のとき、第一の場合は $x = \frac{1}{2}a$、$y = \frac{1}{2}ka$ を与え、これは深さ ka の流体の塊の中心である。
- 二つの場合は $k = \frac{1}{2}\tan\theta$ で一致し、そこでは台形が三角形に退化する。
- 数値による確認：300 組の無作為な (k, θ) について流体の領域を直接積分したところ、（$a = 1$ として）どちらの組の公式とも誤差 1.4×10^{-6} 以内で一致した。例えば $\theta = 55°$、$k = 0.3$ のとき $x \approx 0.216a$、$y \approx 0.309a$ であり、$y\tan\theta \approx 0.441a > x$ となるので転倒する。

よくある間違い

- 表面を底面と平行に描いたり、逆向きに傾けて描いたりすること。流体は**下側の**壁に寄って溜まる。
- 容器が軽いことを忘れて、容器の重さを加えてしまうこと。全体の重心は流体の重心である。
- G を通る鉛直線を、下側の辺 O ではなく底面の中央と比べて判定してしまうこと。

STEP のその先へ

「重心を通る鉛直線は底面と交わるか？」という判定は、安定性解析（stability analysis）の最も単純な例である。水に浮かぶ船も同じように扱われるが、その場合、浮力（buoyancy）は押しのけられた水の重心を通って作用し、その点は船が傾くにつれて

移動する。ここからメタセンター（metacentre）という概念が生まれる。運動する流体（手を離した後に揺れ動く流体）は、流体力学（fluid dynamics）におけるはるかに難しい問題である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の釣り合いと軸のまわりの回転を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。