解答例

STEP III 2002、第 8 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

> **STEP III 2002、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q8

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点の差は、「平均」の角を括り出すと見事に因数分解できる：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}\right)$ であり、括弧の中は正弦の 2i 倍である。これにより、すべての弦（chord）の絶対値（modulus）と偏角（argument）が一度に得られる。最後の小問では、偏角の等しい 2 つの複素数は同じ向きを指すので、それらの絶対値は単純に足し合わされる。あとは 3 つの積を結びつける代数的な恒等式さえあればよい。

解答

$u_1 - u_2$ の偏角

$u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ とおく。因数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$ を括り出すと、

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cdot(-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

となる。最後の行では $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$ を用いた。

> **考えてみよう** なぜこの式から偏角を直接読み取れるのか。また、なぜ正弦を $\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$ ではなく $\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$ の形で書く必要があるのか。

$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ の形の数が（2π の整数倍を除いて）偏角 ϕ をもつのは、$r > 0$ のときに限る。こ

こでは $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ であるから $0 < \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) < \pi$ となり、正弦は真に正である。逆向きに書くと正弦は負になり、偏角は π だけずれてしまう。

したがって $|u_1 - u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ であり、$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi)$ は $u_1 - u_2$ の偏角の 1 つである。arg を $(-\pi, \pi]$ における主値（principal value）とする。$-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ であるから、

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

この値が $-\pi$ より大きければ、それはすでに偏角の主値である（$n = 0$）。そうでなければ値は $(-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ にあり、2π を加えれば範囲内に入る（$n = 1$）。よって

$$\arg(u_1 - u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + 2n\pi, \qquad n = 0 \text{ または} 1,$$

となり、示すべきことが示された。

2 つの積の偏角は等しい

上の議論で u_1, u_2 について用いたのは、$\theta_1 < \theta_2$ であることと、どちらも $(-\pi, \pi)$ に属することだけである。したがって任意の $j < k$ に対して、

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k - \pi)/2}, \\ u_k - u_j = -(u_j - u_k) &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k + \pi)/2}, \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を用いた。いずれの場合も前にかかる実数の因数は正である。$j < k$ に対して $s_{jk} = \sin\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_j) > 0$ とおき、$\Sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ とおく。掛け合わせると（偏角は足し合わされる）、

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)(u_4 - u_3) &= 4s_{12}s_{34}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + (\theta_3 + \theta_4 + \pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}, \\ (u_1 - u_4)(u_3 - u_2) &= 4s_{14}s_{23}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_4 - \pi) + (\theta_2 + \theta_3 + \pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}. \end{aligned}$$

どちらも $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ の正の実数倍であるから、それぞれ 2π の整数倍を除いて偏角 $\frac{1}{2}\Sigma$ をもつ。したがって、それらの偏角の主値の差は 2π の整数倍にしかなり得ない：

$$\arg((u_1 - u_2)(u_4 - u_3)) = \arg((u_1 - u_4)(u_3 - u_2)) + 2n\pi$$

がある整数 n について成り立つ。（実際には $n = 0$ である。差が 2π の整数倍である 2 つの主値は等しくなければならないからである。しかし、問われているのはこの弱い主張だけである。）

最後の小問

3 つの積を

$$A = (u_1 - u_2)(u_4 - u_3), \qquad B = (u_1 - u_4)(u_3 - u_2), \qquad C = (u_1 - u_3)(u_4 - u_2).$$

とおく。展開すると、

$$\begin{aligned} A+B &= (u_1u_4 - u_1u_3 - u_2u_4 + u_2u_3) + (u_1u_3 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_4) \\ &= u_1u_4 + u_2u_3 - u_1u_2 - u_3u_4, \\ C &= u_1u_4 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_3, \end{aligned}$$

となるので、$A+B=C$ である。これは純粋に代数的な事実であり、任意の 4 つの複素数について成り立つ。

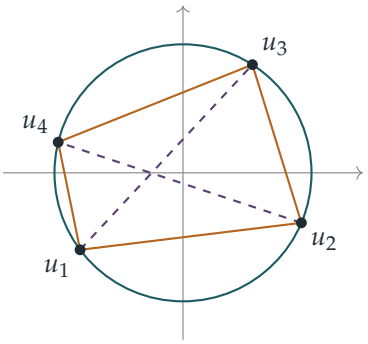
ここで前の小問の結果を用いる：$a = 4s_{12}s_{34} > 0$、$b = 4s_{14}s_{23} > 0$ として $A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$、$B = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$ である。すると $|A| = a$、$|B| = b$ であり、

$$|C| = |A+B| = |(a+b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = a+b = |A| + |B|,$$

となる。$a+b>0$ かつ $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = 1$ だからである。すなわち、

$$|(u_1-u_2)(u_4-u_3)| + |(u_1-u_4)(u_3-u_2)| = |(u_1-u_3)(u_4-u_2)|.$$

要点は、三角不等式（triangle inequality）$|A+B| \le |A| + |B|$ が等号になるのは A と B がちょうど同じ向きを指すときであり、それこそが中間の小問で示したことだという点である。



幾何学的には、$|u_j - u_k|$ は弦の長さであり、偏角が増加していくことから、$u_1u_2u_3u_4$ は頂点がこの順に並んだ、円に内接（inscribed）する四角形である。この恒等式は、対辺どうしの積の和が対角線（破線）の積に等しいことを述べている。これがトレミー（Ptolemy）の定理である。

検算

- 正方形の場合：$\theta_k = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$。各辺は $\sqrt{2}$、各対角線は 2 であり、確かに $2+2=4$ となる。

- $\theta = (-2.5, -0.4, 1.0, 2.9)$ とすると、$|A| \approx 2.8223$、$|B| \approx 1.1013$、$|C| \approx 3.9236 = |A| + |B|$ となる。
- θ_k を順序づけてランダムに 2×10^5 通り選んだところ、$\arg(u_1 - u_2)$ の公式は毎回 $n = 0$ または 1 で成り立ち（どちらの値も現れる）、恒等式は誤差 2×10^{-15} 以内で成り立った。

よくある間違い

- $u_1 - u_2 = 2\mathrm{i} \sin \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$ と書き、正弦が負であることを忘れて偏角を $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \pi)$ と読み取ってしまう。
- $u_4 - u_3$ を $u_3 - u_4$ と同じ偏角をもつかのように扱ってしまう。差の順序を逆にすると、偏角に π が加わる。
- 理由を述べずに $|A| + |B| = |A + B|$ と主張してしまう。これには A と B の偏角が等しいことが必要である。

STEP のその先へ

トレミーの定理には逆があり、さらに一般的な形もある：平面上の任意の 4 点について $|A| + |B| \geq |C|$ が成り立ち（これは $A + B = C$ に三角不等式を適用しただけである）、等号が成り立つのは 4 点がこの順に円または直線上に並ぶときに限る。この背後には**複比**（cross-ratio）$\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$ がある。複比は 4 点が同一円周上にある（concyclic）ときにちょうど実数となり、メビウス（Möbius）変換で保たれる。これは大学 1 年次の複素解析と幾何学における中心的な対象である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を見事な図とともに展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。