解答例

STEP III 2002、第 7 問

純粋数学 • 座標幾何の恒等式

STEP III 2002、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q7

鍵となる考え方

式 $s^2 + b^2 - a^2$ には見覚えがあるはずである。これは $OA = s$、$OB = b$ である三角形 OAB に余弦定理（cosine rule）を用いたときに現れる式である。したがって、最初の恒等式は、実のところ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ に関する冒頭の結果を、OB が座標軸となす二つの角に適用したものにほかならない。その後、二つ目の恒等式は一つ目の恒等式の上に組み立てられる純粋な代数計算であり、不等式は二つの平方の和がそれぞれの平方以上であることから自然に導かれる。

解答

角に関する結果

まず $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ と仮定する。このとき $\cos\beta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$ であるから、

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

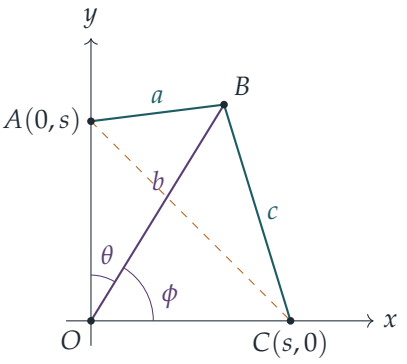
逆（converse）に、$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ と仮定する。このとき $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ である。α と β はともに鋭角（acute）であるから $\cos\beta > 0$ かつ $\sin\alpha > 0$ であり、正の平方根をとると

$$\cos\beta = \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha).$$

ここで β と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ はともに区間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属し、この区間で余弦は狭義単調減少であるから、各値をただ一度しかとらない。よって $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$、すなわち $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$ である。これで「必要十分条件」（if and only if）であることが示された。

一つ目の恒等式

$\theta = \angle AOB$、$\phi = \angle BOC$ とおく。



三角形 OAB（辺 $OA = s$、$OB = b$、$AB = a$）と三角形 OCB（辺 $OC = s$、$OB = b$、$CB = c$）に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

B は第 1 象限の内部（開集合）にあるから、半直線 OB は y 軸の正の部分（OA の向き）と x 軸の正の部分（OC の向き）の厳密に間にある。よって θ と ϕ はともに鋭角であり、$\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$ である。上で示した「only if」の向きにより $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$、すなわち

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

両辺に $4s^2b^2$ を掛けると、一つ目の恒等式が得られる。

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

（直接確かめるには、$B = (x, y)$ とおけばよい。このとき $a^2 = x^2 + (y - s)^2$、$b^2 = x^2 + y^2$、$c^2 = (x - s)^2 + y^2$ であるから、$s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$、$s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$ となり、左辺は $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$ である。）

二つ目の恒等式

代数計算を見通しよくするために、

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

とおく。すると $a^2 = S - P$、$c^2 = S - Q$ である。一つ目の恒等式は $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$ を意味する。$4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$ であるから、これは

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \qquad (\dagger)$$

と書き直せる。さて $a^2+c^2=2S-P-Q$ であり、$2s^2=S+D$、$2b^2=S-D$ であるから、

$$2s^2-a^2-c^2=(P+Q-S)+D, \qquad 2b^2-a^2-c^2=(P+Q-S)-D.$$

考えてみよう $(P+Q-S)\pm D$ というこの分け方には、なぜ意味があるのだろうか。

それは $(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$ となるからである。交差項が打ち消し合い、D は D^2 の形でしか現れなくなる。そして (†) により、これを P、Q、S だけを含む式で置き換えられる。$u=P+Q-S$ とおくと

$$\begin{aligned}&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\&\quad=4(S-P)(S-Q)\\&\quad=4a^2c^2,\end{aligned}$$

ここで 2 行目に (†) を用いた。これが二つ目の恒等式である。

不等式

二つ目の恒等式の左辺の二つの平方はともに 0 以上であるから、

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2, \qquad \text{よって} \qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

ここで 0 以上の平方根をとった（$a,c>0$ に注意する）。これは

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

を意味し、すなわち

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

であり、これは $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$ にほかならない。以上で示された。

等号が成り立つのは、ちょうど $2s^2=a^2+c^2$ のときである。$AC^2=2s^2$ であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理の逆により、これは $\angle ABC$ が直角であること、すなわち B が AC を直径とする円上にあることを意味する。

検算

- $s=2$、$B=(1,3)$ とする。このとき $a^2=2$、$b^2=c^2=10$ である。一つ目の恒等式は $12^2+4^2=160=4\cdot4\cdot10$、二つ目の恒等式は $(-4)^2+8^2=80=4\cdot2\cdot10$ となり、不等式は $3.06\le20\le20.94$ となる。
- 点 $B=(s,s)$ は正方形の 4 番目の頂点であるから、$\angle ABC$ は直角であり、$a=c=s$、$b=s\sqrt{2}$ である。このとき $2b^2=4s^2=(a+c)^2$ となり、等号の場合にあたる。
- 2×10^5 個の点 B で三つの結果すべてを無作為に検証したところ、成り立たない例は一つもなかった。

よくある間違い

- 逆を示す際に鋭角という条件を落としてしまうこと。この条件がなければ、$\cos^2\beta=\sin^2\alpha$ から $\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ は導かれない（たとえば $\beta=\frac{1}{2}\pi+\alpha$ でも成り立つ）。
- 一つ目の恒等式を使わずに、二つ目の恒等式を a,b,c,s で力ずくで展開すること。不可能ではないが、項を落としやすい。S、D による置き換えを使えば計算を制御できる。
- $(2b^2-a^2-c^2)^2\le4a^2c^2$ の平方根を絶対値なしでとってしまい、不等式の片側しか得られないこと。

STEP のその先へ

量 $2b^2-a^2-c^2$ は $2s(x+y-s)$ に等しく、これは三角形 ABC の面積の ±4 倍である。したがって二つ目の恒等式は、余弦定理と面積の公式 $\frac{1}{2}ac\sin B$ を $\cos^2B+\sin^2B=1$ に組み合わせたものである。また上界はトレミー（Ptolemy）の不等式の特別な場合でもある。任意の 4 点に対して $OB\cdot AC\le OA\cdot BC+OC\cdot AB$ が成り立ち、等号は円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）のときに成り立つ。ここではこれが $bs\sqrt{2}\le s(a+c)$ となる。このような距離の間の関係は、距離空間（metric space）や距離幾何学（distance geometry）の研究へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展問題』）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。