解答例

STEP III 2002、第 6 問

純粋数学 ・ 非線形微分方程式

STEP III 2002、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q6

鍵となる考え方

4 乗があるせいで方程式は手ごわく見えるが、$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ はちょうど y^2 の導関数（derivative）の半分である。そこで $u = y^2 - 1$ と置換（substitution）する。すると方程式は u と u' だけの方程式に帰着し、平方根をとれば変数分離（separation of variables）できる。注意が必要なのは符号だけである。u の符号によって平面は帯状領域 $|y| < 1$ と領域 $|y| > 1$ に分かれ、それぞれから異なる曲線族が得られる。

解答

$u = y^2 - 1$ とおくと、$u' = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ であり、$y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (\frac{1}{2}u')^4$ となる。よって方程式は

$$\frac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

となる。ここで両辺の非負の平方根をとった（$(u')^2$ と $4|u|$ はどちらも非負なので、何も失われない）。

まず、解曲線は決して $y = 0$ と交わらないことに注意する。そこでは元の方程式の左辺は 0 だが、右辺は 1 だからである。したがって、与えられたどちらの点を通る解でも、常に $y > 0$ である。

考えてみよう u' の符号をどちらにとるかを気にせずに、$(u')^2 = 4u$ を解くにはどうすればよいか。

$u > 0$ となるところでは、$v = \sqrt{u} > 0$ として $u = v^2$ と書ける。すると $u' = 2vv'$ なので、$(u')^2 = 4u$ は $4v^2(v')^2 = 4v^2$、すなわち $(v')^2 = 1$ となる。v' は連続で決して零にならないから符号は一定であり、$v' = \pm 1$、したがってある定数 a を用いて $v = \pm(x - a)$

となる。いずれの場合も

$$u = v^2 = (x-a)^2.$$

である。符号のあいまいさは 2 乗することで単に消えてしまう。$u < 0$ の場合は、$u = -v^2$ として同じ議論を行えばよい。

小問 (i)：$(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ を通る解

ここでは $y^2 = \frac{3}{4} < 1$ なので、この点の近くでは $u < 0$、すなわち $|y| < 1$ である。$v > 0$ として $1 - y^2 = -u = v^2$ と書くと、$(u')^2 = -4u$ から上と全く同様に $(v')^2 = 1$ が得られるので、$1 - y^2 = (x-a)^2$、すなわち

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 :$$

となる。これは中心が x 軸上にある半径 1 の円である。$x = 0$ では $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ が必要なので、$a = \pm\frac{1}{2}$ である。$y > 0$ であるから、$(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ を通る解曲線は上半円

$$y = \sqrt{1 - (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad \text{および} \qquad y = \sqrt{1 - (x + \tfrac{1}{2})^2}.$$

である。直接確かめておく。$(x-a)^2 + y^2 = 1$ 上で陰関数微分（implicit differentiation）を行うと $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x-a)$ となるので、$y^4(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^4 = (x-a)^4 = (1-y^2)^2 = (y^2-1)^2$ である。✓

小問 (ii)：$(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$ を通る解

今度は $y^2 = \frac{5}{4} > 1$ なので $u > 0$ であり、上の議論から $y^2 - 1 = (x-a)^2$、すなわち

$$y^2 - (x-a)^2 = 1 :$$

が得られる。これは中心 $(a, 0)$ の直角双曲線（rectangular hyperbola）である。$x = 0$ では $a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$ なので、やはり $a = \pm\frac{1}{2}$ であり、$y > 0$ より解曲線は上側の枝

$$y = \sqrt{1 + (x - \tfrac{1}{2})^2} \qquad \text{および} \qquad y = \sqrt{1 + (x + \tfrac{1}{2})^2},$$

である。これらはすべての x で定義される。直接確かめると、$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$ なので、左辺は $(x-a)^4 = (y^2-1)^2$ である。✓

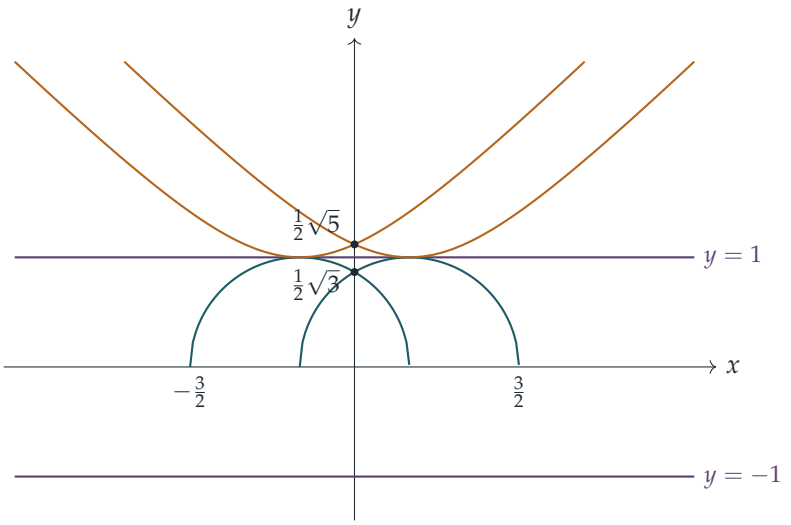
直線 $y = \pm 1$

すべての x で $y = 1$ または $y = -1$ ならば、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ なので左辺は 0 である。また $y^2 - 1 = 0$ なので、右辺も 0 である。よって両直線はともに解である。

? **考えてみよう** これらの直線は、円や双曲線とどのような関係にあるか。

各円 $(x-a)^2+y^2=1$ と各双曲線 $y^2-(x-a)^2=1$ は、いずれも点 $(a,1)$ において傾き零で $y=1$ に接する（同様に、点 $(a,-1)$ において $y=-1$ に接する）。したがって $y=\pm1$ は両方の曲線族の**包絡線**（envelope）であり、どちらの族にも属さない。これらは $u=0$ から生じるもので、v で割る操作によって除外されていたのである。その帰結として、$y=1$ 上の点を通る解は一意的ではない。たとえば、$(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$ から $a=\frac{1}{2}$ の円をたどってその頂点 $(\frac{1}{2},1)$ まで上り、そこから $y=1$ に沿って進み、さらに $x\geq b$ で双曲線 $y=\sqrt{1+(x-b)^2}$ を上っていく（$b\geq\frac{1}{2}$ は任意）と、十分に滑らかな（傾きが連続な）曲線が得られ、それはいたるところで方程式を満たす。上の 4 本の曲線は与えられた点を通る「基本的な」解であり、それらの点を通る他のすべての解は、これらの曲線、$y=1$、および $y=1$ に接するさらに別の円や双曲線の断片をつなぎ合わせて作られる。

概形



半円（青緑色）は中心 $(\pm\frac{1}{2},0)$、半径 1 であり、$x=\pm\frac{1}{2}\pm1$ で x 軸と垂直に交わり、$x=\pm\frac{1}{2}$ で $y=1$ に接する。双曲線の枝（琥珀色）は同じ 2 点で $y=1$ に接し、漸近線（asymptote）$y=\pm(x\mp\frac{1}{2})$ をもつ。すなわち $|x|$ と同程度に増大する。各組は y 軸に関して互いに対称であり、各組の 2 曲線は y 軸上の与えられた点で交わる。

検算

- $a=\frac{1}{2}$ の円上の点 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$ において、$y'=-(x-a)/y=1/\sqrt{3}$ なので、左辺は $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$、右辺は $(\frac{3}{4}-1)^2=\frac{1}{16}$ である。
- $(0,\frac{1}{2}\sqrt{5})$ から正の符号をとって $y'=\pm\sqrt{|y^2-1|}/y$ を数値積分すると $y(1.5)=$

2.2360680 となり、$a = -\frac{1}{2}$ の双曲線上の値 $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ と一致する。

よくある間違い

- 両方の領域で平方根を $(u')^2 = 4u$ ととってしまうこと。$|y| < 1$ ではこれは実数解をもたず、円が失われる。
- 各段階で平方根の一方の符号だけを残し、その結果、各点を通る曲線を 2 本ではなく 1 本しか見つけられないこと。
- $y = \pm 1$ は族のすべての曲線に接しているにもかかわらず、どちらの族にも属さないことを忘れること。

STEP のその先へ

直線 $y = \pm 1$ は**特異解**（singular solution）である。すなわち、一般解の包絡線であって、定数 a をどのように選んでも得られないものである。特異解は、一階微分方程式（first-order differential equation）に対する一意性定理（uniqueness theorem）、すなわちピカール–リンデレーフ（Picard–Lindelöf）の定理が成り立たなくなるところにちょうど現れる。$\sqrt{|y^2-1|}$ は $y = \pm 1$ でリプシッツ連続（Lipschitz continuous）でなく、そのために解がそこで分岐しうるのである。この種の包絡線は、y' について線形でない一階微分方程式に典型的に見られる（クレロー（Clairaut）の方程式がその古典的な例である）。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、解の存在と一意性、そしてそれが破れる場合について論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。