解答例

STEP III 2002、第 5 問

純粋数学 • 四次方程式の因数分解

> **STEP III 2002、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q5

鍵となる考え方

2 次式が完全平方式の定数倍となるのは、その判別式（discriminant）が 0 となるとき、かつそのときに限る。これが前半のすべてであり、残りの部分を動かす原動力でもある。2 次式の平方から 4 次式を引いたものが完全平方式の定数倍となるように t を選べれば、4 次式は **2 つの平方の差**（difference of two squares）となり、ただちに因数分解できる。これは 4 次方程式に対するフェラーリ（Ferrari）の古典的な解法であり、4 次式の問題を t についての 3 次式の問題に置き換えるものである。

解答

2 次式の条件

$p \neq 0$ と仮定する。平方完成（completing the square）すると、

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

これがある h に対して $p(x+h)^2$ の形になるのは、定数 $r - \frac{q^2}{4p}$ が 0 のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$q^2 = 4pr,$$

のときであり、このとき $h = \frac{q}{2p}$ である。（逆に、$p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$ を展開すると $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$ が得られるので、この条件は十分条件であるだけでなく必要条件でもある。）$p = 0$ の場合、可能なのは $q = r = 0$ のみである。このときも条件 $q^2 = 4pr$ から $q = 0$ は導かれるが、さらに $r = 0$ も必要となる。

t の方程式

展開すると、

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2 = x^4+bx^3+(\tfrac{1}{4}b^2+2t)x^2+btx+t^2.$$

$\frac{1}{2}b$ を選んだのは、まさに4次式を引いたときに x^3 の項が打ち消し合う（x^4 の項も打ち消し合う）ようにするためである。

$$(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t)^2-(x^4+bx^3+cx^2+dx+e) = (\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)x^2+(bt-d)x+(t^2-e).$$

これは $p=\frac{1}{4}b^2+2t-c$、$q=bt-d$、$r=t^2-e$ とした2次式であり、これを完全平方式の定数倍（すなわち $k=p$）である $k(x+h)^2$ に等しくしたい。前半の結果より、t は

$$(bt-d)^2 = 4(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c)(t^2-e).$$

を満たさなければならない。これは t についての3次方程式（cubic equation）である（右辺の t^3 の項の係数は8であり、左辺は t について2次にすぎない）。したがって、少なくとも1つの実数解を必ずもつ。

4次式の因数分解

ここでは $b=6$、$c=9$、$d=-2$、$e=-7$ であるから、

$$\tfrac{1}{4}b^2+2t-c = 2t, \qquad bt-d = 6t+2, \qquad t^2-e = t^2+7.$$

t の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}(6t+2)^2 &= 8t(t^2+7)\\ 36t^2+24t+4 &= 8t^3+56t\\ 0 &= 2t^3-9t^2+8t-1.\end{aligned}$$

考えてみよう この3次方程式の解を素早く見つけるにはどうすればよいか。

まず小さな値を試してみる。係数の和は $2-9+8-1=0$ であるから、$t=1$ は解である。どの解を用いてもよい。それぞれの解が正しい因数分解を与えるからである。最も簡単な解からは最も簡単な因数分解が得られる。

$t=1$ のとき、差は

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2,$$

となるので、$k=2$、$h=2$ であり、実際 $8^2=4\cdot 2\cdot 8$ が成り立つ。よって

$$(x^2+3x+1)^2-(x^4+6x^3+9x^2-2x-7) = 2(x+2)^2,$$

すなわち

$$x^4+6x^3+9x^2-2x-7=(x^2+3x+1)^2-(\sqrt{2}\,(x+2))^2.$$

これは 2 つの平方の差であるから、

$$\begin{aligned}x^4+6x^3+9x^2-2x-7&=(x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2))(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2))\\&=(x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2})(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

$k=2>0$ であるからその平方根は実数であり、したがってこれらは求めるとおり、実数係数の 2 つの 2 次因数である。

3 次方程式の残りの 2 つの解 $t=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{41})$ は $2t^2-7t+1=0$ から得られ、これらも $k=2t>0$ を満たす。これらは、4 次式の 4 つの（実数の）解を組み合わせて実数係数の 2 次因数をつくる、残り 2 通りの方法を与える。しかしその係数はずっと煩雑であり、そのため $t=1$ を用いるのがよいのである。

検算

- 展開して確かめる。2 つの因数の積の x^3 の係数は $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$、定数項は $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$ であり、どちらも正しい。
- $x=1$ のとき 4 次式の値は $1+6+9-2-7=7$ であり、因数分解からは $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$ が得られる。
- 各因数の判別式は $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$ と $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$ でどちらも正であるから、4 次式は 4 つの実数解をもつ。これは 3 次方程式の 3 つの解すべてが実数係数の因数分解を与えることと整合する。また、ランダムに選んだ 200 個の点で因数分解を数値的にも確認した。

よくある間違い

- $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$ の x^2 の係数を誤る。$(\frac{1}{2}bx)^2$ だけでなく交差項 $2\cdot x^2\cdot t$ も寄与するので、正しくは $\frac{1}{4}b^2+2t$ である。
- 判別式の条件を $q^2=pr$ と書いてしまう。あるいは、k が最高次の係数 $\frac{1}{4}b^2+2t-c$ であり、実数係数の因数分解のためにはこれが正でなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

t についての3次方程式は3**次分解方程式**（resolvent cubic）と呼ばれ、これが16世紀のフェラーリの解法である。すべての4次方程式は3次方程式に帰着され、その3次方程式はカルダノ（Cardano）の公式で解ける。この方法がうまくいく深い理由、そして一般の5次方程式にはこのような公式が存在しない理由は、多項式の根がどのように置換されうるかを研究するガロア理論（Galois theory）に属する。体と多項式の代数への最初の手引きとしては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。