解答例

STEP III 2002、第 4 問

純粋数学 ・ ディオファントス不等式

> **STEP III 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q4

鍵となる考え方

方程式 $x^3+x^2=y^3-y^2$ では、急速に増加する量と、$-y^2$ によって増加を抑えられた量とが競い合っている。そのため y は x を「追い越す」必要があるが、その差は 1 未満にとどまる。この 2 つの不等式（inequality）によって y は x と $x+1$ の間に厳密に挟み込まれ、その隙間に入る整数（integer）は存在しない。最後の小問では、追加の解は 0 または負の値からしか生じ得ない。さらに、(m,n) を $(-n,-m)$ に置き換えるという巧妙な対称性（symmetry）を用いれば、場合分けが半分で済む。

解答

1 つ目の結果

$x,y>0$ かつ $x^3+x^2=y^3-y^2$ とし、背理法（proof by contradiction）のために $x\geq y$ と仮定する。正の実数上では 3 乗も 2 乗も単調増加（increasing）であるから、

$$x^3+x^2\geq y^3+y^2>y^3-y^2,$$

となる。ここで狭義の不等号の部分には $y^2>0$ を用いた。これは方程式に矛盾するので、$x<y$ である。

2 つ目の結果

次に $0<x\leq y-1$ とする。すると $y\geq x+1>1$ である。$f(t)=t^3-t^2$ とおく。このとき $t>\frac{2}{3}$ に対して $f'(t)=3t^2-2t=t(3t-2)>0$ であるから、f は $[1,\infty)$ 上で単調

増加である。$y \geq x+1$ であり、どちらもこの区間に属するので、

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) &\geq f(x+1) = (x+1)^2((x+1)-1) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

が成り立つ。$x > 0$ のとき $x^2 + x > 0$ だからである。よって、求める通り $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$ である。

2つの結果を合わせると、正の x に対して、$x^3 + x^2 = y^3 - y^2$ を満たす任意の正の y は

$$x < y < x+1.$$

を満たすことがわかる。

正の整数の組は存在しない

正の整数 a, b が $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$ を満たすと仮定する。右辺は正であるから、$a^3 > b^3$ であり $a > b$ である。式を変形すると

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

となり、これは上の方程式で $x = b, y = a$（どちらも正）としたものである。よって $b < a < b+1$ である。

考えてみよう 整数であることは実際どこで使われているだろうか？

ここだけである。すなわち、b と $b+1$ の間に厳密に挟まれる整数は存在しない。言い換えれば、a, b が整数で $a > b$ ならば $a \geq b+1$、つまり $0 < b \leq a-1$ が導かれ、すると2つ目の結果から $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$ となって方程式に矛盾する。よって、そのような正の整数の組は存在しない。（実数の範囲では解はいくらでもあり、各 $x > 0$ に対して $y \in (x, x+1)$ が1つずつ存在する。整数はそれらをすべて素通りしてしまうのである。）

すべての整数の組

次に、

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

を満たすすべての整数 m, n を求めたい。2つの観察によって手間が省ける。

- (m, n) が解ならば、$(-n, -m)$ も解である。実際、$(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$ であり、2乗の和は変わらない。

- $(*)$ の右辺は非負であるから、$m^3 \geq n^3$、すなわち $m \geq n$ である。等号が成り立つのは $m^2 + n^2 = 0$、すなわち $m = n = 0$ のときに限る。

一方が 0 の場合。 $n = 0$ ならば $m^3 = m^2$ であるから、$m = 0$ または $m = 1$ である。$m = 0$ ならば $-n^3 = n^2$ であるから、$n = 0$ または $n = -1$ である。これより $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ が得られる（最後のものは、$(1,0)$ を対称性で移したものである）。

両方とも正の場合。 前の小問により不可能である。

両方とも負の場合。 このとき $-n$ と $-m$ はともに正であり、$(-n,-m)$ は両成分が正の解となってしまうが、これは不可能である。

符号が異なる場合。 $m > n$ であるから $m > 0 > n$ である。$p \geq 1$ として $n = -p$ とおく。すると $(*)$ は

$$m^3 + p^3 = m^2 + p^2, \qquad \text{すなわち} \qquad m^2(m-1) + p^2(p-1) = 0.$$

となる。正の整数に対しては 2 つの項はともに ≥ 0 であるから、どちらも 0 でなければならず、$m = p = 1$ が導かれる。これより $(1,-1)$ が得られ、実際 $1 - (-1) = 2 = 1 + 1$ である。

以上より、$m^3 - n^3 = m^2 + n^2$ の整数解 (m,n) はちょうど

$$(m,n) = (0,0), \quad (1,0), \quad (0,-1), \quad (1,-1).$$

である。「組」が自明な組を除く意味であれば、$(0,0)$ を除けばよい。

検算

各組は手計算で確かめられる。$(1,0)$ については $1 - 0 = 1 = 1 + 0$、$(0,-1)$ については $0 - (-1) = 1 = 0 + 1$、$(1,-1)$ については $2 = 2$ である。$|m|, |n| \leq 300$ のすべてについてコンピュータで探索すると、ちょうどこの 4 つの解が見つかる。1 つ目と 2 つ目の結果の確認として、ランダムな $x > 0$ に対して $y^3 - y^2 = x^3 + x^2$ を数値的に解くと、常に $x < y < x + 1$ となった。たとえば $x = 1$ のとき $y \approx 1.696$ である。

よくある間違い

- 最後の小問で、0 と負の整数を忘れること。解はすべてそこにある。
- 2 つの整数のどちらが「先」かを勝手に決めつけること。ここでは 3 乗の差が正であるから、大きい方の数が先に来なければならない。そのことを明記すること。
- 2 つ目の結果を、$t \geq 1$ で $t^3 - t^2$ が単調増加であることに触れずに、単に「展開」す

るだけで証明しようとすること。$f(y) \geq f(x+1)$ という段階にはこの事実が必要である。

STEP のその先へ

「実数解が連続する 2 つの整数の間に厳密に閉じ込められるので、整数解は存在しない」という論法は、ディオファントス方程式（Diophantine equation）の研究における標準的な道具であり、整数を変数とする多項式の方程式に対してまず試すべきことであることが多い。このように解を評価することは、そうした方程式の多くが有限個の解しかもたないことを証明する方法でもあり、その解は有限回の探索で見つけることができる。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等整数論』）は、この種の整数論へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。