解答例

STEP III 2002、第 3 問

純粋数学 • 曲線の概形

> **STEP III 2002、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q3

鍵となる考え方

すべてはグラフの形から導かれる。グラフは $x = b$ において下向きの鉛直な接線（vertical tangent）をもって出発し、ただ一つの最小値（minimum）まで下がったのち、限りなく増加する。出発点の高さと最小値の高さがわかれば、$\mathrm{f}(x) = c$ の解の個数を数えることは、高さ c の水平線を引いて曲線と何回交わるかを見るだけのことになる。二つの数値的な方程式は、その c^2 の値がこれらの範囲の境界や内部に位置する特別な場合である。

解答

グラフ

左端では $\mathrm{f}(b) = a\sqrt{b}$ である。$x > b$ に対して微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

$x \to b^+$ のとき第 2 項は $-\infty$ に発散するので、曲線は点 $(b, a\sqrt{b})$ から真下に向かって出発する（鉛直な接線）。

二つの平方根はともに正であるから

$$\mathrm{f}'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2-1},$$

ここで最後の変形では $a^2 - 1 > 0$ を用いた。よって f は $[b, x_0]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[x_0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。ただし

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2-1}.$$

最小となる点では $x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$ であるから

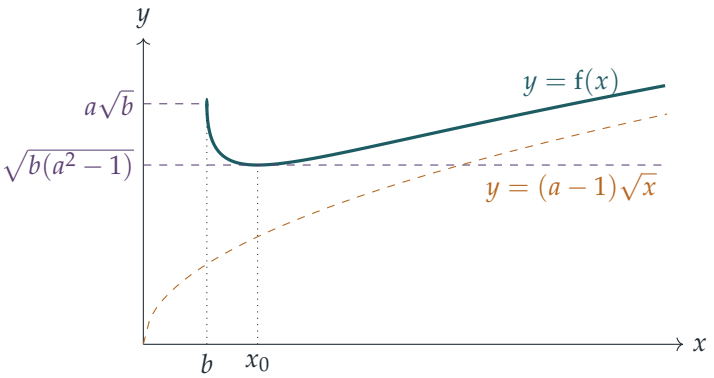
$$\mathrm{f}(x_0) = a\cdot\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

x が大きいとき、有理化（rationalising）すると

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-b}) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

となる。したがって $a > 1$ より $\mathrm{f}(x) \to \infty$ であり、曲線は $y = (a-1)\sqrt{x}$ のすぐ上にあって、$x \to \infty$ のときこれに近づく。

最後に、出発点の高さは最小値より高い。実際 $a^2b > (a^2-1)b$ であるから $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$ である。



解の個数を数える

最小値を $m = \sqrt{b(a^2-1)}$、出発点での値を $M = a\sqrt{b}$ とおくと $0 < m < M$ である。二つの単調（monotonic）な部分のそれぞれにおいて f は連続（continuous）かつ狭義単調であるから、値域の各値をちょうど 1 回ずつとる。

- $[b, x_0]$ 上では、f は $[m, M]$ の各値をちょうど 1 回ずつとる。
- $[x_0, \infty)$ 上では、f は $[m, \infty)$ の各値をちょうど 1 回ずつとる。

二つの部分が共有するのは点 x_0 のみであり、そこでの値は m である。

すべての $x \geq b$ に対して $\mathrm{f}(x) \geq m$ であるから、$c < m$ のとき方程式 $\mathrm{f}(x) = c$ は解をもたない。$c > 0$ のもとでこれは $c^2 < m^2$ と同値であり、すなわち

$$c^2 < b(a^2-1) \quad \Longrightarrow \quad \text{解なし},$$

これが示すべきことであった。残りの場合については次のとおりである。

考えてみよう なぜ $c^2 = a^2 b$ のとき解は 1 個ではなく 2 個なのか？

$c = M$ のとき、左側の部分からは端点 $x = b$ そのものが解として得られる。定義域（domain）は $x = b$ を含むので、これは正当な解である。右側の部分からは、さらに先にもう一つの解が得られる。左側の部分から解が得られなくなるのは $c > M$ のときに限る。したがって $c > 0$ のとき、

- $c^2 = b(a^2 - 1)$ のとき（水平線が最小点に接し、解は $x = x_0$ のみ）、または $c^2 > a^2 b$ のとき（その高さまで届くのは増加する枝だけ）、**解はちょうど 1 個**である。
- $b(a^2 - 1) < c^2 \leq a^2 b$ のとき（各枝に 1 個ずつ）、**解はちょうど 2 個**である。

小問 (i)

ここでは $a = 3, b = 2, c = 4$ であるから $b(a^2 - 1) = 16 = c^2$ となる。水平線は最小点に接し、解はちょうど 1 個で

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

実際 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$ である。直接解くこともできる。$3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x - 2}$ と変形して両辺を 2 乗すると $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$、すなわち $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$ を得る。この重解（repeated root）は、接すること（tangency）を代数的に表したものである。

小問 (ii)

ここでは $a = 3, b = 3, c = 5$ であるから $b(a^2 - 1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2 b$ となり、解はちょうど 2 個である。それらを求めるため、方程式を $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x - 3}$ と書き、両辺を 2 乗する。

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

$\sqrt{x}$ についての 2 次方程式とみると $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$ であるから $\sqrt{x} = 2$ または $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$ となり、

$$x = 4 \qquad \text{または} \qquad x = \frac{49}{16}.$$

2 乗すると見かけの解（spurious roots）が生じうるので、両方をもとの方程式で確かめる。どちらも $x \geq 3$ を満たし（$\frac{49}{16} = 3.0625$ である）、

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5.$$

よって両方とも真の解であり、解の個数が 2 個であることと一致する。予想どおり、$x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$ の両側に 1 個ずつある。

検算

- $a = \frac{3}{2}, b = 2$（図の場合）のとき、$x_0 = \frac{18}{5}$ であり、$\mathrm{f}(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$ は $\mathrm{f}(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$ より小さい。
- ランダムに選んだ 200 組の (a, b) について、細かい格子上で f を数値的に調べたところ、x_0 で最小値 $\sqrt{b(a^2-1)}$ をとることが確認でき、$y = c$ との交わりを数えると、c^2 の三つの範囲でそれぞれ解は 0 個、2 個、1 個となった。
- (i) で重解が得られたことは、c^2 がちょうど $b(a^2-1)$ に一致することと整合する。(ii) では $c^2 = 25$ は 24 と 27 の間に真に含まれ、実際に 2 個の解が見つかった。

よくある間違い

- $c^2 = a^2 b$ を「解が 1 個」の場合に入れてしまうこと。$x = b$ は定義域に含まれるので、解として数える。
- 2 乗したあとに確認をしないこと。ここでは両方の解が残るが、それぞれについて $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$ と $x \geq 3$ を確かめなければならない。
- $\mathrm{f} \to \infty$ となるのは $a > 1$ のおかげであることを忘れること。$a \leq 1$ ならば最小値は存在せず、様子はまったく異なる。

STEP のその先へ

解の個数を数える議論は、解析学の二つの事実に基づいている。区間上の連続関数は、両端での値の間にあるすべての値をとること（中間値の定理（intermediate value theorem））と、狭義単調な関数は各値を高々 1 回しかとらないことである。この二つを合わせると、グラフの概形が証明に変わる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は両者を丁寧に展開し、なぜ連続性こそがまさに必要な仮定なのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。