解答例

STEP III 2002、第 2 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の級数

> **STEP III 2002、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q2

鍵となる考え方

最初の結果は、正接の加法定理（tangent addition formula）を姿を変えて述べたものにすぎない。本当に必要な作業は、両辺がともに tan が単射（one-to-one）となる同じ区間に属する角であることを確かめることだけである。この公式が得られれば、帰納法（induction）はそれを 1 回適用し、少し因数分解するだけで済む。最後の和については、$r^2 - r + 1$ が $r^2 + r + 1$ の r を 1 つずらしたものにほかならないことに気づくのが要点である。したがって、新しい級数（series）は元の級数の先頭に項を 1 つ加えたものになる。

解答

加法定理

$A = \arctan a$、$B = \arctan b$ とおく。このとき $\tan A = a$、$\tan B = b$ であり、

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

が成り立つ。$ab < 1$ であるから、この式は意味をもつ。これにより、$A + B$ と $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ の正接が等しいことがわかる。しかし、tan は周期 π をもつので、これだけでは両者が等しいとはいえない。そこで、両方の角が tan が単射となる 1 つの区間に属することを示す必要がある。

> ? **考えてみよう** なぜ $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$ で証明が終わりにならないのだろうか。

証明が終わらないのは、arctan の値が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ の範囲にしかないからである。$A + B$

もこの範囲にあることを確かめなければならない。

- $0 < a < 1$ であり、arctan は増加関数であるから、$0 < A < \frac{\pi}{4}$ である。同様に $0 < B < \frac{\pi}{4}$ であるから、$0 < A + B < \frac{\pi}{2}$ となる。
- $a + b > 0$ かつ $1 - ab > 0$ であるから、分数 $\frac{a+b}{1-ab}$ は正である。よって、その arctan も $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。

関数 tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、したがって単射である。ゆえに、この区間で正接が等しい 2 つの角は等しく、

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

が得られる。

数学的帰納法

$S_n = \sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$ とおく。示すべきことは $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$ である。

基底段階。 $n = 1$ のとき、両辺はともに $\arctan\frac{1}{3}$ である。

帰納段階。 ある $n \geq 1$ に対して $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$ が成り立つと仮定する。次の項について

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3,$$

であるから、

$$S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

となる。2 つの引数はともに 0 より大きく 1 より小さいので、$a = \frac{n}{n+2}$、$b = \frac{1}{n^2+3n+3}$ として加法定理が適用できる。$\frac{a+b}{1-ab}$ の分子と分母に $(n+2)(n^2+3n+3)$ を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab} &= \frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n} \\ &= \frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

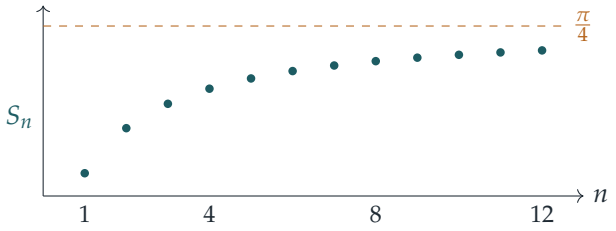
を得る。2 つの 3 次式はともにある負の整数で 0 になる。分子は $n = -1$ で、分母は $n = -3$ で 0 となる。因数分解すると

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)} = \frac{n+1}{n+3},$$

となる。ここで $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 > 0$ であるから約分してよい。よって $S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$ であり、これは $n+1$ のときの主張である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について結果が成り立つ。✓

無限和。$n \to \infty$ のとき $\frac{n}{n+2} \to 1$ である。arctan は連続（continuous）であるから、

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$



最後の和

$s = r - 1$ とおく。すると

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

である。r が $1, 2, 3, \ldots$ を動くとき、s は $0, 1, 2, \ldots$ を動く。$s = 0$ の項は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であり、残りの項（$s \geq 1$）はちょうど先ほど和を求めた級数になる。したがって

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2-r+1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad \checkmark$$

である。最初の級数が収束（converge）するので 2 番目の級数も収束し、したがって第 1 項を切り離すことは正当である。

検算

- $n = 2$ のとき、$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$ の正接は $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ であり、公式が予測するとおりである。
- 数値的には $S_{2000} \approx 0.784898$ であり、$\arctan\frac{2000}{2002}$ とは 10^{-12} の精度で一致する。一方 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$ である。
- 2 番目の級数を $r = 10^6$ まで足すと $1.5707953\ldots$ となり、$\frac{\pi}{2}$ との差は 10^{-6} 以内である。これは n 項までの差 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$ と合っている。

よくある間違い

- 「両辺の tan が等しい」で止めてしまうこと。値域についての議論がなければ証明は不完全である。（たとえば $a = b = 2$ のとき公式は成り立たない。左辺は正であるが、$\arctan(-\frac{4}{3})$ は負である。）

- 帰納段階で公式を使う前に、2 つの引数がともに $(0,1)$ に属することの確認を忘れること。
- 最後の和を再び $\frac{\pi}{4}$ と書いてしまうこと。ずらし $r \mapsto r-1$ によって、先頭に余分な項 $\arctan 1$ が加わる。

STEP のその先へ

帰納法にはもっと鮮やかな別解がある。$\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$ であるから、各項は $\arctan(r+1) - \arctan r$ に等しい。したがって和は**次々に打ち消し合って**（telescoping）$\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$ となり、これは減法定理により $\arctan \frac{n}{n+2}$ に等しい。打ち消し合いの構造を見抜くことや、部分和（partial sums）の極限を連続性によって正当化することは、大学初年度の解析学の講義で日常的に使われる道具である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は級数と連続性を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）にはこの種の STEP 形式の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。