解答例

STEP III 2002、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布の最小値

STEP III 2002、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q13

鍵となる考え方

「少なくとも一方が x より小さい」は「両方とも x 以上である」の余事象（complement）であり、後者の確率は独立性（independence）によって積に分解される。指数分布（exponential distribution）の裾の確率は $\mathrm{P}(X_i \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}$ ととても単純なので、その積もまた指数分布の裾の確率になる。最小値に関する証明はこれに尽きる。バスの問題はその直接の応用である。次のバスまでの待ち時間は、2 つの指数分布に従う間隔のうち小さいほうなのである。

解答

一方または両方が x より小さい確率

まず、1 つの指数分布に従う確率変数の裾の確率を求める。$x \geq 0$ のとき、

$$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \int_x^\infty \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\right]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}.$$

$X_1 < x$ または $X_2 < x$（または両方）であるという事象を E とする。その余事象は、$X_1 \geq x$ と $X_2 \geq x$ が**両方とも**成り立つという事象である。X_1 と X_2 は独立であるから、

$$\mathrm{P}(X_1 \geq x \text{ かつ} X_2 \geq x) = \mathrm{P}(X_1 \geq x)\,\mathrm{P}(X_2 \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x},$$

よって、$x \geq 0$ のとき

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.}$$

（$x < 0$ のときは、どちらの変数も負の値をとらないので、確率は 0 である。）

考えてみよう なぜ単に $\mathrm{P}(X_1 < x)$ と $\mathrm{P}(X_2 < x)$ を足してはいけないのか？

2 つの事象は重なり合っているからである。両方が同時に x より小さくなることがあり、単に足すとその場合を二重に数えてしまう。包除原理（inclusion–exclusion）を使って $(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})+(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})$ と計算することもでき、整理すれば同じ答えになるが、余事象を考えるほうが速い。

最小値は指数分布に従う

$X = \min(X_1, X_2)$ とおく。2 つの数のうち小さいほうが x より小さいのは、少なくとも一方が x より小さいときであり、かつそのときに限る。したがって $\{X < x\}$ は上の事象 E にほかならない。よって X の分布関数（distribution function）は

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (x \ge 0),$$

であり、$x < 0$ のときは $F(x) = 0$ である。（連続型確率変数では $\mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X \le x)$ である。）微分すると、X の確率密度関数（density）は

$$f(x) = F'(x) = (\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (0 \le x < \infty),$$

となり、これはパラメータ（parameter）$\lambda_1+\lambda_2$ の指数分布の確率密度関数である。よって X は指数分布に従う。これが示すべきことであった。

バス

パラメータ λ の指数分布の平均（mean）は、部分積分（integration by parts）により $\int_0^\infty t\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1/\lambda$ である。時間を分単位で測ると、平均間隔 15 分と 30 分からパラメータは

$$\lambda_A = \tfrac{1}{15}, \qquad \lambda_B = \tfrac{1}{30}.$$

となる。各路線のバスはちょうど出発したところなので、次の路線 A のバスまでの時間は路線 A のバスの間隔 T_A そのものであり、路線 B についても同様に T_B である。これらは独立で、それぞれパラメータ λ_A、λ_B の指数分布に従う。どちらの路線でもカレッジに行けるので、待ち時間は $W = \min(T_A, T_B)$ であり、いま証明した結果より W はパラメータ

$$\lambda_A + \lambda_B = \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{30} = \tfrac{1}{10}.$$

の指数分布に従う。中央値（median）m は $\mathrm{P}(W \le m) = \frac{1}{2}$ を満たすので、

$$1 - \mathrm{e}^{-m/10} = \tfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-m/10} = \tfrac{1}{2} \iff m = 10\ln 2.$$

$\ln 2 \approx 0.693$ であるから、待ち時間の中央値は $m \approx 6.93$ 分であり、約 7 分である。これが示すべきことであった。

検算

- $\lambda_2 \to 0$（路線 B のバスがほとんど来ない）とすると、答えは $1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$ となり、X_1 の分布そのものになる。当然そうなるべきである。
- 平均待ち時間は 10 分であり、各路線の平均 15 分や 30 分のどちらよりも短い。また中央値 $10\ln 2$ は平均より小さく、右に裾の長い分布（right-skewed distribution）ではふつうそうなる。
- 平均 15 と 30 の独立な指数分布に従う間隔の組を 2×10^5 組シミュレーションしたところ、最小値の中央値は約 6.91 分となった。理論値は $10\ln 2 = 6.931\ldots$ である。

よくある間違い

- 平均をそのままパラメータとして使ってしまう。平均 15 の指数分布では $\lambda = \frac{1}{15}$ であり、15 ではない。
- 2 つの確率を $\mathrm{P}(X_1 < x) + \mathrm{P}(X_2 < x)$ と足してしまう。これは二重に数えており、1 を超えることもある。
- 各路線の中央値を平均したり、路線 A だけの中央値（$15\ln 2 \approx 10.4$）をとったりする。路線が 2 つあることで待ち時間は短くなるのである。

STEP のその先へ

バスの間隔が指数分布に従うということは、バスが**ポアソン過程**（Poisson process）に従って到着するということであり、ここでの結果は、独立な 2 つのポアソン過程を合わせると、到着率がそれぞれの到着率の和であるような別のポアソン過程が得られることを述べている。無記憶性（memoryless property）$\mathrm{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathrm{P}(X > t)$ とあわせて、これは待ち行列理論（queueing theory）や連続時間マルコフ連鎖（continuous-time Markov chains）の基礎であり、大学 1 年の確率論の講義で学ぶ内容である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、指数分布に従う確率変数とポアソン過程を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。