解答例

# STEP III 2002、第 12 問

確率・統計 ・ 条件付けによる期待値

**STEP III 2002、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q12

## 鍵となる考え方

ゲームがどう始まるかで条件付け（conditioning）を行う。どのゲームも H、TH、TT のいずれかで始まる。はじめの二つの場合には何も役に立つことは起きておらず（裏の連続が途切れている）、ゲームは単に最初からやり直しになるので、残りの長さの期待値（expectation）は再び $E$ である。この「再生」（renewal）の考え方から $E$ についての一次方程式が得られ、これを解けばよい。同じ考え方を、最初の表がいつ出るかで場合分けする形にすれば、$r$ 回の裏の場合も扱える。

## 解答

以下を通じて、$p$ は表が出る確率、$q = 1 - p$ は裏が出る確率とし、各回の投げは独立であるとする。$0 < p < 1$ を仮定する。これによりゲームは確率 1 で終了し、以下に現れる期待値はすべて有限である。

### $E$ の方程式の説明

最初の 1 回または 2 回の投げに注目する。次のうちちょうど一つが起こる。

- **最初に H**（確率 $p$）。投げを 1 回使い、進行中の裏の連続はない。各回の投げは独立なので、残りのゲームはゲーム全体の新しいコピーであり、その長さの期待値は $E$ である。全体の期待値は $1 + E$。
- **T のあと H**（確率 $qp$）。投げを 2 回使い、やはり表が裏の連続を打ち消したので、ゲームは最初からやり直しになる。全体の期待値は $2 + E$。
- **T のあと T**（確率 $q^2$）。ゲームはちょうど 2 回の投げで終わる。

これら三つの場合は互いに排反で、すべての場合を尽くしている（確率の和は $p+qp+q^2 = p+q = 1$）。全期待値の法則（law of total expectation）により

$$E = p(1+E) + (1-p)p(2+E) + 2(1-p)^2,$$

となり、これが与えられた方程式である。

### $E$ を求める

$E$ を含む項をまとめると

$$E\,(1-p-qp) = p + 2qp + 2q^2.$$

左辺では $1-p-qp = q-qp = q(1-p) = q^2$ である。右辺では $p+2q(p+q) = p+2q = 1+q$ である。$q \neq 0$ より

$$E = \frac{1+q}{q^2} = \frac{2-p}{(1-p)^2}.$$

### 賞金の期待値

$W$ を表の回数の期待値、すなわちポンド単位での賞金の期待値とする。同じ三つの場合を用いる。H のあとでは £1 を得てゲームはやり直しになる。TH のあとでもやはり £1 を得てゲームはやり直しになる。TT のあとでは何も得られず、ゲームは終わる。したがって

$$W = p(1+W) + qp(1+W) + q^2 \cdot 0.$$

**考えてみよう** TH の場合に $W$ ではなく $1+W$ となるのはなぜか？

この場合の 2 回目の投げは表**である**から、ゲームがやり直しになる前に £1 を得ている。これを忘れるのが、ここで最も間違えやすい点である。

項をまとめると $W(1-p-qp) = p(1+q)$ となるので、$Wq^2 = p(1+q)$ であり、

$$W = \frac{p(1+q)}{q^2} = \frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \text{ ポンド}.$$

$W = pE$ となっていることに注意しよう。ゲームが止まる時点は投げの結果に依存するにもかかわらず、平均すると投げのうち割合 $p$ が表なのである。

### 裏が $r$ 回続くまでのゲーム

今度は、裏が $r$ 回続いたときにゲームが止まる場合の投げの回数の期待値を $E$ とする。最初の表で条件付けする。最初の $r$ 回がすべて裏であるか、または $0 \leq j \leq r-1$ を満たすある $j$ について最初の表が $j+1$ 回目に出るかのいずれかである。

- $j$ **回の裏のあと表**（確率 $q^j p$）。投げを $j+1$ 回使い、裏の連続は途切れ、ゲームはやり直しになる。全体の期待値は $j+1+E$。
- $r$ **回の裏**（確率 $q^r$）。ゲームはちょうど $r$ 回の投げで終わる。

したがって

$$E = \sum_{j=0}^{r-1} q^j p\,(j+1+E) + rq^r.$$

右辺の $E$ の係数は、$1-q=p$ より $p\sum_{j=0}^{r-1} q^j = p\cdot\dfrac{1-q^r}{1-q} = 1-q^r$ である。これを左辺に移項すると

$$q^r E = p\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j + rq^r. \qquad (*)$$

**考えてみよう** 公式集なしで $\sum(j+1)q^j$ をどう計算するか？

$S = \sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j = 1+2q+3q^2+\cdots+rq^{r-1}$ とおき、$qS = q+2q^2+\cdots+(r-1)q^{r-1}+rq^r$ を引くと

$$(1-q)S = 1+q+q^2+\cdots+q^{r-1}-rq^r = \frac{1-q^r}{p} - rq^r.$$

よって $pS = \dfrac{1-q^r}{p} - rq^r$ であり、これを $(*)$ に代入すると $rq^r$ の項が打ち消し合う。

$$q^r E = \frac{1-q^r}{p} - rq^r + rq^r = \frac{1-q^r}{p}.$$

したがって

$$E = \frac{1-q^r}{pq^r},$$

となり、示すべき式が得られた。$r=2$ のとき、これは $\dfrac{(1-q)(1+q)}{pq^2} = \dfrac{1+q}{q^2}$ となり、最初のゲームの結果と一致する。

## 検算

- 公平な硬貨 $p=q=\frac{1}{2}$ の場合、最初のゲームは平均 $E = \frac{3/2}{1/4} = 6$ 回続き、賞金は $W = £3$ であり、当然そうあるべきように $E$ の半分になっている。
- $r=1$ の場合、ゲームは最初の裏で止まるので、長さは平均 $1/q$ の幾何分布（geometric distribution）に従う。公式は $\dfrac{1-q}{pq} = \dfrac{1}{q}$ を与える。

- $q \to 0$（ほとんどすべての投げが表）のとき、$E$ と $W$ はともに発散する。当然そうなるべきである。
- $r = 1, \ldots, 7$ といくつかの $p$ の値について、「現在 $k$ 回の裏が続いている」という状態の連鎖を分数で厳密に解き、これらの公式を確認した。$p = 0.4$ で $2 \times 10^5$ 回のゲームをシミュレーションしたところ、$r = 2$ では投げの回数の平均が 4.438（理論値 4.444）、賞金が £1.772（理論値 £1.778）であり、$r = 3$ では投げの回数が 9.074 の理論値に対して 9.076 であった。

## よくある間違い

- 賞金の方程式で $qp(1 + W)$ の代わりに $qpW$ と書いてしまうこと。これは誤った答え $p/q^2$ を与える。
- 最初の 1 回の投げだけで条件付けすること。T が 1 回出ただけではゲームはやり直しに**ならない**。連続する裏のうち 1 回分がすでに確保されているからである。与えられた方程式が 2 回先まで見ているのはこのためである。

## STEP のその先へ

「表が出れば、その後はちょうど最初と同じに見える」という議論は、マルコフ連鎖（Markov chain）に対する**再生**法あるいは**一歩目**（first-step）解析と呼ばれる方法であり、一般に到達時間（hitting time）の期待値はこのようにして計算される。$W = pE$ というきれいな事実はワルド（Wald）の等式の一例である。すなわち、$N$ が停止時刻（stopping time）であれば、独立同分布（independent, identically distributed）な項を確率的な個数 $N$ だけ足した和の期待値は、$\mathbb{E}[N]$ と 1 項の平均の積に等しい。どちらについても、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）や Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）で読むことができる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。