解答例

STEP III 2002、第 11 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

> **STEP III 2002、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q11

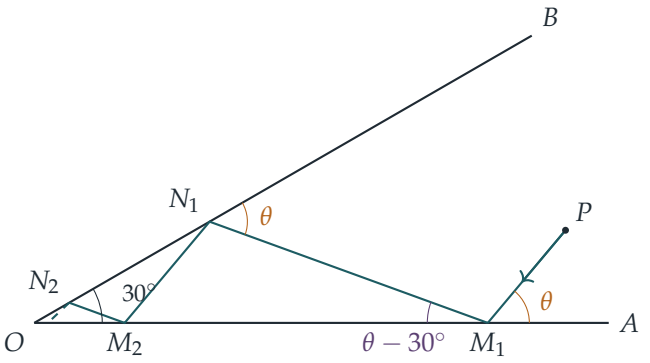
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.5 節「**有限時間に無限回の跳ね返り**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/zeno-wedge.html

鍵となる考え方

なめらかな壁では、力積（impulse）は壁に垂直にはたらく。したがって、速度の壁に沿った成分はそのまま保たれ、壁に垂直な成分だけが e 倍される。これを三角形 OM_1N_1 の角と組み合わせると、前半は一つの三角方程式に帰着する。後半では、衝突のたびに運動が縮小された形でくり返される。各区間は短くなっていくが、粒子も遅くなっていくので、足し合わせるべきは距離ではなく**時間**である。その和は等比級数（geometric series）になる。

解答

粒子は、なめらかな水平面上を動く質点としてモデル化する。したがって、衝突と衝突の間は一定の速さで直線運動をする。壁はなめらかであり、各衝突は反発係数（coefficient of restitution）e のニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）に従う。



e と v_1/u_1 を求める

角 $PM_1A = \theta$ であるから、粒子は O の方へ向かって、壁と角 θ をなす向きに進んで M_1 に達する。衝突の直前、速度の成分は

$u_1 \cos\theta$ 壁に沿った成分（O へ向かう向き），　　$u_1 \sin\theta$ 壁に垂直な成分（壁に向かう向き）．

である。壁はなめらかなので、粒子が受ける力積は OA に垂直である。よって

壁に沿った成分：$u_1 \cos\theta$（変化しない），
垂直な成分：$e\,u_1 \sin\theta$（向きが逆になり e 倍される）．

となる。したがって、粒子は依然として O の方へ向かいながら、壁と角 φ をなす向きに M_1 を離れる。ここで

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1 \sin\theta}{u_1 \cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1 \cos\varphi = u_1 \cos\theta. \tag{$*$}$$

である。

次に、三角形 OM_1N_1 の幾何から φ を求める。点 O, N_1, B は一直線上にあり、角 $M_1N_1B = \theta$ であるから、角 $ON_1M_1 = 180° - \theta$ である。O における角は $30°$ なので

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180° - 30° - (180° - \theta) = \theta - 30°.$$

となる。φ が正であるためには $\theta > 30°$ が必要であり、この配置では暗にそれが仮定されている。すると $(*)$ から

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30°)}{\tan\theta}}$$

および

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

が得られる。最後の形は $\cos(\theta-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$ と展開して得られる。好みに応じて $e=\dfrac{\sqrt{3}\tan\theta-1}{\tan\theta\,(\sqrt{3}+\tan\theta)}$ と書いてもよい。$0<\theta-30^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $0<e<1$ となり、問題の要求どおりである。

有限時間で O に到達すること

粒子は O の方へ向かいながら、壁 OB と角 θ をなす向きに N_1 に到達する（角 $M_1N_1B=\theta$ だからである）。これは、二つの壁の役割を入れ替えれば M_1 における状況とまったく同じである。したがって同じ計算が当てはまり、粒子は N_1O と角 $\theta-30^\circ$ をなす向きにはね返り、その速さは

$$r=\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}.$$

倍になる。

> **考えてみよう** 粒子は再び角 θ で M_2 に到達し、本当に同じパターンがくり返されるのだろうか。

そのとおりである。三角形 ON_1M_2 において、O における角は 30°、N_1 における角は $\theta-30^\circ$ である。よって角 $OM_2N_1=180^\circ-\theta$ となり、これは角 $N_1M_2A=\theta$ を意味する。数学的帰納法（induction）により、どの衝突も壁と角 θ をなして起こる。どの区間も壁と角 $\theta-30^\circ$ をなして壁を離れる。そして三角形 OM_nN_n, ON_nM_{n+1} はすべて角 $30^\circ, \theta-30^\circ, 180^\circ-\theta$ をもつので、互いに相似（similar）である。

長さ。三角形 OM_1N_1 における正弦定理（sine rule）により

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta-30^\circ)}=\frac{OM_1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{M_1N_1}{\sin30^\circ}.$$

である。したがって、新しい三角形はどれも直前の三角形を

$$k=\frac{ON_1}{OM_1}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta}.$$

倍に縮小したものである。区間 M_1N_1, N_1M_2, $M_2N_2,\ldots$ を順に区間 $1,2,3,\ldots$ とよぶ。区間 n の長さは ℓ_1k^{n-1} である。ここで $\ell_1=M_1N_1=\dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$ である。

速さ。区間 n は一定の速さ v_1r^{n-1} で進む。

時間。したがって、区間 n を進むのにかかる時間は

$$\tau_n=\frac{\ell_1k^{n-1}}{v_1r^{n-1}}=\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1},\qquad q=\frac{k}{r}=\frac{\sin(\theta-30^\circ)\cos(\theta-30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin2\theta}.$$

である。

考えてみよう 区間の長さは等比数列的に縮んでいくが、粒子も遅くなっていく。なぜそれだけでは決着しないのだろうか。

足し合わせるのは時間であり、時間の比 q は区間の縮み方（k）と粒子の減速の仕方（r）を比べたものである。必要なのは $q<1$ である。そこで $30^\circ<\theta<60^\circ$ と仮定する。すると

$$0^\circ<2\theta-60^\circ<60^\circ \;\Rightarrow\; \sin(2\theta-60^\circ)<\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 60^\circ<2\theta<120^\circ \;\Rightarrow\; \sin 2\theta>\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

であるから $0<q<1$ となる。このとき、全体の時間は収束（convergent）する等比級数で表される：

$$T=\frac{PM_1}{u_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_1}{v_1}q^{n-1}=\frac{PM_1}{u_1}+\frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

これは有限である。簡単にするために $\sin 2\theta-\sin(2\theta-60^\circ)=2\cos(2\theta-30^\circ)\sin 30^\circ$ を用いると、$1-q=\dfrac{\cos(2\theta-30^\circ)}{\sin 2\theta}$ が得られる。すると、M_1 以降にかかる時間は

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)}=\frac{OM_1\cos(\theta-30^\circ)}{u_1\cos(2\theta-30^\circ)},$$

となり、$30^\circ<\theta<60^\circ$ において正かつ有限である。

最後に、粒子が実際に O に到達することを確かめる。n 回目の衝突の後、粒子と O の距離は OM_1k^n であり、$0<k<1$ であるから $OM_1k^n\to 0$ である。一つの区間を進む間、粒子と O の距離は、その区間の両端と O の距離のうち大きい方以下である。したがって $t\to T$ のとき粒子と O の距離は 0 に近づく。すなわち、粒子は無限回の衝突の後、有限の時刻 T に O に到達する。 ■

検算

- $\theta=45^\circ$ のとき：$e=\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}\approx 0.268$、$v_1/u_1=\sqrt{3}-1\approx 0.732$、そして $q=\sin 30^\circ/\sin 90^\circ=\frac{1}{2}$ であるから、各区間にかかる時間は直前の区間の半分である。$OM_1=u_1=1$ とすると、M_1 から O までの時間は $\cos 15^\circ/\cos 60^\circ=2\cos 15^\circ\approx 1.932$ である。衝突を一つずつ追うシミュレーション（60 回の衝突）では 1.931852 となり、一致する。
- $\theta=60^\circ$ のとき：$q=1$ であるから、どの区間にも同じ時間がかかり、合計は無限大になる。$\theta>60^\circ$ では $q>1$ である。したがって 60° はちょうど境界であり、T の式はそこで $\cos(2\theta-30^\circ)=\cos 90^\circ=0$ によって発散する。
- $\theta\to 30^{\circ+}$ のとき $e\to 0$ である。粒子はほとんどはね返らず、ほぼまっすぐ O へすべっていく。予想どおりである。

よくある間違い

- 三角形の扱いを誤る：角 M_1N_1B は N_1 における**外角**であるから、内角は $180^\circ - \theta$ であり、M_1 におけるはね返りの角は $\theta + 30^\circ$ ではなく $\theta - 30^\circ$ である。
- 距離 $OM_n \to 0$ であるというだけで、粒子が O に到達すると論じてしまう。無限個の区間があるので、**時間**の級数が収束することが必要であり、しかも粒子は衝突のたびに遅くなる。
- 衝突の際に接線方向の成分の向きを逆にしてしまう。なめらかな壁では、法線方向の成分だけが変化する。

STEP のその先へ

有限時間内に無限回の衝突が起こることを**ゼノン現象**（Zeno behaviour）という。よく知られた例は、$e < 1$ で床の上をはずむボールであり、ここではくさび形の壁が床の役割を果たしている。なめらかな運動と突然の跳びが混在する「ハイブリッド」系（hybrid systems）を研究する数学者は、ゼノン時刻の後に何が起こるかを定めなければならない。粉体（granular materials）では、同じ効果が**非弾性崩壊**（inelastic collapse）とよばれ、シミュレーションにおいて実際に大きな問題を引き起こす。衝突と力積を大学 1 年生のレベルで丁寧に扱ったものとしては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。