解答例

STEP III 2002、第 10 問

力学 ・ 摩擦のある回転

STEP III 2002、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s3-q10

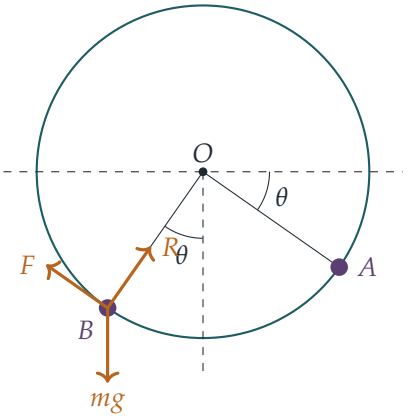
鍵となる考え方

2 番目の質点が滑らない限り、それは円柱とともに動くので、系全体は固定軸のまわりに回転する剛体（rigid body）とみなせる。すなわち、半径 a の位置に、互いに 4 分の 1 回転だけ離れた 2 つの等しい質量があるものである。このとき、エネルギー（または軸のまわりの力のモーメント（moments））を用いれば、運動は 1 行で求まる。滑りが始まる時点を求めるには、固定されていない質点だけを取り出して考え、面に沿う方向と面に垂直な方向にニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を用いて、その質点に必要な摩擦力（friction）F と垂直抗力（normal reaction）R を求める。F が初めて μR に達したときに質点は滑る。

解答

設定

2 つの質点はどちらも軽い円柱上の質点として扱い、軸はなめらかであるとする。O を軸、A を固定された質点、B を固定されていない質点とする。静止状態から放すと A が下がるので、円柱は（図では時計回りに）回転し、B を A と反対側の側面に沿って持ち上げる。角 θ だけ回転した後、OA は水平から下向きに角 θ をなし、OB は反対側で鉛直下向きと角 θ をなす。



運動方程式

B が滑らない間は、2 つの質点はともに角速度（angular speed）$\dot\theta$ で半径 a の円周上を動き、円柱自身には質量がない。O の高さを位置エネルギー（potential energy）の基準とすると、A の高さは $-a\sin\theta$、B の高さは $-a\cos\theta$ である。系は $\theta = 0$ で静止状態から動き始め、なめらかな軸は仕事をしない。また、B と円柱の間の摩擦力は、相対運動がないので正味の仕事をしない。したがって、力学的エネルギーは保存される：

$$2\cdot\tfrac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

すなわち

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

これを時間で微分し、$2\dot\theta$（運動が始まった後は 0 でない）で割ると

$$\ddot\theta = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

となり、求める式が得られる。同じことを O のまわりの力のモーメントで考えることもできる。A にはたらく重力は回転の向きに $mga\cos\theta$ のモーメントをもち、B にはたらく重力は回転と逆向きに $mga\sin\theta$ のモーメントをもち、慣性モーメント（moment of inertia）は $2ma^2$ である。

B はいつ滑るか

次に B だけを考える。B にはたらく力は、重力 mg、O に向かう垂直抗力 R、面に沿う摩擦力 F である。F は B の運動の向き（側面を上る向き）を正とする。B は半径 a の円周上を動くので、O に向かう加速度 $a\dot\theta^2$ と、運動の向きの加速度 $a\ddot\theta$ をもつ。重力は、O から真っすぐ遠ざかる向きに成分 $mg\cos\theta$、運動と逆向きに成分 $mg\sin\theta$ をも

つ。したがって

$$\text{中心方向}O: \quad R - mg\cos\theta = ma\dot{\theta}^2,$$
$$\text{運動の向き}: \quad F - mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}.$$

$(*)$ と運動方程式を用いると

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ ではどちらも正である。($2\cos\theta \ge 1$ を用いると、$0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ に対して $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$ となるので $R > 0$ であり、また $\theta = 0$ では $R = mg$ である。) よって B は面に接したままであり、摩擦力は B を側面に沿って押し上げる向きにはたらく。質点は $F \le \mu R$ である限り滑らない。すなわち

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

である限り滑らない。$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる $\theta = \frac{\pi}{3}$ では

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

考えてみよう なぜ質点はこれより前に滑り始めることがないのだろうか。

すべての $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$ に対して $\rho(\theta) < \mu$ であることを示す必要がある。$N = \sin\theta + \cos\theta$、$D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$ とおく。すると

$$N'D - ND' = (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta)$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta,$$

であり、これは $0 < \theta < \pi$ で正である。$[0, \frac{\pi}{3}]$ 上で $D > 0$ であるから、そこでは $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$ となり、ρ は $\rho(0) = \frac{1}{2}$ から狭義単調増加する。したがって、ρ は $\theta = \frac{\pi}{3}$ でちょうど μ に達するまで μ より小さいままである。また、$(*)$ より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $\dot{\theta}^2 > 0$ であるから、円柱は実際に回転し続けてこの角度に達する。

よって、2 番目の質点は円柱が 60° 回転したときに滑り始める。これが示すべきことであった。

検算

- $\theta = 0$ のとき：B は最下点で静止しているが、$F = \frac{1}{2}mg \ne 0$ である。これは正しい。A にはたらく重力が円柱を回そうとしており、摩擦力は B を円柱とともに加速さ

せなければならないからである。実際、そこでは $F = ma\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mg$ であり、B にはまだ速さがないので $R = mg$ である。

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\ddot{\theta} = 0$ であり、角速度は最大となる。これは、2 つの重力の O のまわりのモーメントがつり合うときに予想されるとおりである。
- 数値的に運動方程式を積分し、B にはたらく接触力をその加速度から直接計算すると、R と F の式が再現され、F/R は 60.00° で初めて $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$ に達する。

よくある間違い

- 円柱の慣性モーメントを含めてしまう：円柱は軽いので、慣性モーメント $2ma^2$ に寄与するのは 2 つの質点だけである。
- B の接線加速度（tangential acceleration）$a\ddot{\theta}$ を忘れる：そうすると $F = mg\sin\theta$ となり、誤った角度が得られる。
- 60° で $F = \mu R$ となることだけを確かめ、それ以前には F/R がより小さかったことを示さない。

STEP のその先へ

これは自由度（degree of freedom）1 の系である。すなわち、拘束（constraint）（滑らないという条件）を課すと、ただ 1 つの座標 θ ですべてが記述され、エネルギーから運動が直接得られる。拘束力はその後で求められ、拘束に必要な力が面の供給できる力を超えたときに拘束が破れる。これは球面から質点が離れる問題と同じ論理であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、これはラグランジュの未定乗数（Lagrange multipliers）を用いて体系化される。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で剛体の回転と拘束力を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。