解答例

STEP III 2002、第 1 問

純粋数学 ・ 広義積分と体積

STEP III 2002、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

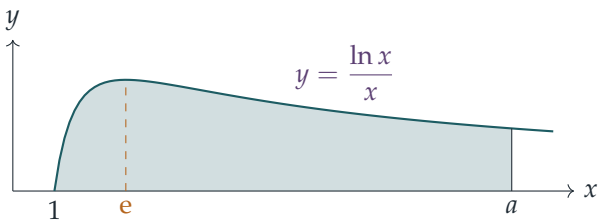
step.maths.org/questions/02-s3-q1

鍵となる考え方

$\frac{1}{x}$ が $\ln x$ の導関数（derivative）であることに気づけば、どちらの積分も易しくなる。面積の被積分関数（integrand）は「ある関数とその導関数の積」なので、見ただけで積分できる。体積の被積分関数 $(\ln x)^2/x^2$ には x の累乗が残っているので、部分積分（integration by parts）を 2 回行い、そのたびに $\ln x$ の累乗を微分して次数を下げる。興味深いのは 2 つの極限の対比である。曲線はちょうど面積が限りなく大きくなる程度にゆっくりと減衰するが、それを 2 乗すると、体積が一定の値に落ち着く程度に速く減衰するのである。

解答

$x \geq 1$ では $\ln x \geq 0$ であるから、曲線は x 軸上またはその上側にあり、面積は単に積分そのものである。曲線は $(1,0)$ から出発し、$x = \mathrm{e}$ で最大となり（そこで $y' = (1-\ln x)/x^2 = 0$）、その後ゆっくりと軸に近づいていく。



面積

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \dfrac{\ln x}{x}$ であるから、

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

となる。ここで $\ln 1 = 0$ を用いた。（同じことであるが、$u = \ln x$、$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$ と置換すれば $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$ が得られる。）

$a \to \infty$ のとき $\ln a \to \infty$ であるから、$A(a) \to \infty$ となる。すなわち、増え方は非常にゆっくりではあるが、面積は有界でない。

体積

x 軸のまわりに回転させると、体積は $V(a) = \pi \displaystyle\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ である。

$u = (\ln x)^2$、$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。このとき $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$、$v = -\frac{1}{x}$ であるから、

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$ として同じことをもう一度行うと、

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

これらを合わせると、

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

$x = 1$ では括弧の中は $0 + 0 + 2$ であるから、下端からの寄与は $-(-2) = +2$ となり、

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

考えてみよう $(\ln a)^2/a$ の分子も分母も無限大に発散するのに、これが 0 に収束することはどうしてわかるのだろうか。

対数は正のどんな累乗よりもゆっくり増加する。これを厳密にするために、すべての $t > 0$ に対して $\ln t < t$ が成り立つことから出発する（直線 $y = t$ は $y = \ln t$ の上側にある。差 $t - \ln t$ は $t = 1$ で最小値 1 をとる）。$t = a^{1/4}$ とおくと $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$、すなわち $\ln a < 4a^{1/4}$ が得られる。よって $a > 1$ のとき、

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

であり、もちろん $2/a \to 0$ である。したがって $V(a)$ の中の分数は 0 に収束し、

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{ただし} a \to \infty.$$

となる。被積分関数は正であるから $V(a)$ は a について増加する。したがって体積は 2π に向かって単調に増加するが、決して 2π に達することはない。回転させる領域の面積は無限大であるにもかかわらず、この立体の体積は有限なのである。

検算

- $a = 1$ のとき、どちらの公式も当然そうあるべきとおり 0 を与える：$A(1) = 0$、$V(1) = \pi(2-2) = 0$。
- $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$ を微分すると $(\ln x)^2/x^2$ に戻る（$2\ln x$ の項と 2 の項は、括弧の中身の導関数と打ち消し合う）。
- 数値的には、$\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \,\mathrm{d}x$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 2.54247 となり、公式と一致する。また $x = \mathrm{e}^t$ とおくと、無限遠までの体積は $\pi \int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ となり、これを数値計算すると $6.283185\ldots = 2\pi$ となる。

よくある間違い

- 下端を忘れること。$\ln 1 = 0$ により $x = 1$ ではほとんどの項が消えるが、定数項 $-2/x$ は消えず、これが極限値 2π のすべてを担っている。
- 何の理由も示さずに $(\ln a)^2/a \to 0$ と主張すること。$\ln a < 4a^{1/4}$ のような 1 行の比較で十分である。

STEP のその先へ

これは「ガブリエルのラッパ」(Gabriel's horn、$y = 1/x$ を回転させたもの)の親戚である。ガブリエルのラッパは体積が有限で表面積が無限大の立体であるが、ここでは平面領域の面積さえ無限大である。置換 $x = \mathrm{e}^t$ によって体積は $\pi \int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$ となる。これはガンマ関数（gamma function）$\Gamma(n+1) = n!$ との最初の出会いである。広義積分（improper integral）や「対数は累乗に負ける」といった比較をきちんと意味づけることは、大学 1 年の解析学の中心的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、それについて読むのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。