解答例

STEP II 2002、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP II 2002、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

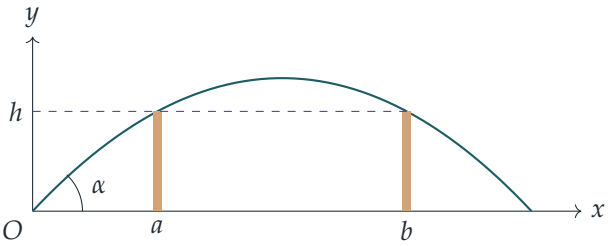
step.maths.org/questions/02-s2-q9

鍵となる考え方

軌道（path）の方程式を、y を x の関数として書き下す。「両方の壁のすぐ上をかすめて通過する」とは、軌道が二つの壁の頂点を通るということであり、したがって方程式 $y = h$ の解はちょうど $x = a$ と $x = b$ である。これは解がわかっている二次方程式（quadratic）であり、解と係数の関係（sum and product of roots）と比べれば、すべてが一度に得られる。第二の部分は、あとは二つの公式を h について微分（differentiate）するだけの問題である。

解答

粒子を重力のみを受けて運動する質点としてモデル化し（空気抵抗（air resistance）は無視する）、O を原点、x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。図が意図しているとおり、$0 < a < b$、$h > 0$、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を仮定する。



$\tan\alpha$ と V を求める

初速度の成分を $V\cos\alpha$ と $V\sin\alpha$ とすると、時刻 t において

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(V\cos\alpha)$ を代入して t を消去すると、軌道は

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{ただし} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

粒子はそれぞれの壁をすれすれで越えるので、軌道は頂点 (a,h) と (b,h) を通る。よって a と b は

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{すなわち、} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

の解である。これは（$k \neq 0$ より）x の二次方程式なので解は高々二つであり、したがってその解はちょうど a と b である。解と係数の関係と比べると、

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

二つ目の式から $k = h/(ab)$ が得られ、これを一つ目の式に用いると

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

最後に、k の定義から

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2h}{ab},\end{aligned}$$

となり、題意が示された。

（これらの値のもとで軌道は $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$ となり、$x = a$ と $x = b$ で h に等しいことが一目でわかる点にも注目しておくとよい。）

壁を高くする

二つ目の粒子も、同じ距離 a と b にある、高さが $h + \delta h$ となった両方の壁をすれすれで越える。したがって、上の公式は h、α、V をそれぞれ $h + \delta h$、$\alpha + \delta\alpha$、$V + \delta V$ に置き換えても成り立つ：

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

どちらも（a、b を固定すれば）h だけの関数であるから、小さな変化に対しては $\delta(\text{量}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{量})}{\mathrm{d}h}\delta h$ を用いてよい。

角度。 $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$ を h について微分すると $\sec^2\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$ となるので、

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\,\delta h.$$

$\sec^2\alpha > 0$、$a, b > 0$、$\delta h > 0$ であるから右辺は正であり、よって $\delta\alpha > 0$ である。すなわち、粒子はより急な角度で投げなければならない。

> **考えてみよう** 「≈」は一次（first-order）の近似にすぎない。これから本当に $\delta\alpha$ の符号を結論づけてよいのだろうか？

よい。しかも、実は近似をまったく使わずに結論できる。$\tan\alpha$ の式は h について一次式なので、厳密に $\tan(\alpha+\delta\alpha) - \tan\alpha = \frac{a+b}{ab}\,\delta h > 0$ が成り立つ。tan は $(0, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加であるから、これより $\alpha + \delta\alpha > \alpha$、すなわち $\delta\alpha > 0$ が従う。

速さ。 $\dfrac{2V^2}{g}$ を h について微分すると、

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = -\frac{ab}{h^2} + \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2 - \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

したがって

$$\delta V \approx \frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h - \frac{ab}{a+b}\right)\left(h + \frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

$h - \frac{ab}{a+b}$ 以外の因数はすべて正である（$V, a, b, h, \delta h > 0$ より）。よって δV の符号は $h - \frac{ab}{a+b}$ の符号と一致し、$h > ab/(a+b)$ ならば正、$h < ab/(a+b)$ ならば負であり、題意が示された。（この導関数は $h = ab/(a+b)$ 以外では 0 でないので、δh が十分小さければ、一次の項によって符号が本当に定まる。）

解釈。 $\tan\alpha = h(a+b)/(ab)$ と比べると、条件 $h > ab/(a+b)$ はちょうど $\tan\alpha > 1$、すなわち $\alpha > 45°$ と同じである。h の関数として見ると、$2V^2/g$ は $p/h + qh$ の形をしており、これは $h = \sqrt{p/q} = ab/(a+b)$ のとき最小となる。このとき $\alpha = 45°$、$2V^2/g = 2(a+b)$ である。つまり、投げる角度がすでに 45° より急ならば、壁を高くするとより大きな速さが必要になる。角度がそれより緩やかならば、壁を高くする（そして投げる角度を 45° に向けて急にする）と、必要な速さはむしろ小さくなる。

検算

- $a = 3\,\mathrm{m}$、$b = 7\,\mathrm{m}$、$h = 2.5\,\mathrm{m}$ とする。このとき $\tan\alpha = 25/21$、$2V^2/g = 8.4 + 11.90\ldots = 20.30\ldots\,\mathrm{m}$ である。これらの値を用いて運動を数値的に追跡すると、粒子は $x = 3$ と $x = 7$ の両方で（10^{-11} の精度で）高さ $2.5\,\mathrm{m}$ にある。

- 対称性：答えは a と b について対称であり、そうでなければならない。軌道は $x = \frac{1}{2}(a+b)$ に関して対称な放物線だからである。
- 単位：ab/h と $(a+b)^2h/(ab)$ は長さであり、$2V^2/g$ と一致する。また $\tan\alpha$ は無次元（dimensionless）である。
- $h = ab/(a+b)$ のとき $\alpha = 45°$、$2V^2/g = 2(a+b)$ となる。$a = 3$、$b = 7$ ではこれは 20 m であり、上の 20.30 m よりわずかに小さく、これが最小値であることと整合する。

よくある間違い

- 二つの壁についてそれぞれ方程式を立て、それを力ずくで連立して解くこと。それでも解けるが、解と係数の関係を使えば二行で済む。
- k を V に戻すときに $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を忘れること。
- $2V^2/g$ の導関数を因数分解せずに δV の符号を述べること。すっきりした条件は、$h > 0$ のもとでの $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$ から得られる。

STEP のその先へ

第二の部分はちょっとした感度分析（sensitivity analysis）である。写像 $h \mapsto (\alpha, V)$ をある解のまわりで線形化し、出力がどのように反応するかを読み取ったのである。線形化（linearisation）と、それに関連する軌道族の包絡線（envelope）の考え方（与えられた速さで到達可能なすべての点を囲む「安全放物線（parabola of safety）」）は、大学一年生の力学や微積分の講義で標準的に扱われる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動とこうした近似の技法を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。