解答例

STEP II 2002、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP II 2002、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も、考えうる最も単純な一階線形微分方程式（first-order linear equation）$y' = p(x)\,y$ である。したがって、p が一つの式で与えられる区間（interval）上では、解は定数と $\exp(\int p\,\mathrm{d}x)$ の積になる。注意すべき点は、問題が $x = 0$ で分かれていることである。両側にそれぞれ別の任意定数が現れる。一方の側の定数は与えられた y の値で決まり、もう一方の側の定数は、二つの部分が $x = 0$ でつながるという要請だけで決まる。前半はまさにこの手順の予行演習であり、後半では絶対値（absolute value）の中にこの構造が隠れている。

解答

最初の方程式の組

$x < 0$ では、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$ から、ある定数 A を用いて $y = A\mathrm{e}^{-x}$ となる。（これ以外に解がないことは、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$ より $y\mathrm{e}^{x}$ が区間 $x < 0$ 上で定数であることからわかる。）$x = -1$ で $y = a$ という条件から $A\mathrm{e} = a$ となるので、

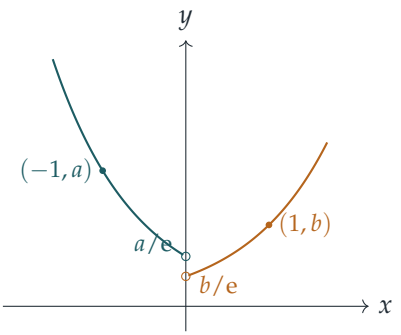
$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

同様に、$x > 0$ では $y = B\mathrm{e}^{x}$ であり、$x = 1$ で $y = b$ という条件から $B = b/\mathrm{e}$ となるので、

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

$x \to 0^{-}$ のとき $y \to a/\mathrm{e}$、$x \to 0^{+}$ のとき $y \to b/\mathrm{e}$ である。一般にこれらは異なり、曲線は y 軸のところで跳ぶ。下の図は $a, b > 0$ かつ $a > b$ の典型的な場合を示している。

左側は減衰する指数関数で、軸に近づくにつれて下がっていく。右側は増加する指数関数である。白丸は二つの（異なる）極限値を表している。



跳びがないのは、二つの極限が一致する $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$ のとき、すなわち

$$a = b.$$

のとき、かつそのときに限る。このとき曲線は $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$ となり、$x = 0$ に角をもつ左右対称の「V」字のような曲線である。

$|\mathrm{e}^x - 1|$ を含む方程式

$\mathrm{e}^x > 1$ となるのは $x > 0$ のとき、かつそのときに限るので、

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

したがって、方程式は先ほどと同じように、二つの通常の線形方程式に分かれる。

$x > 0$ の場合： $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$ である。$\mathrm{e}^x - 1$ の原始関数（antiderivative）の一つは $\mathrm{e}^x - x$ なので、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$ となり、

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

$x = 1$ で $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ なので、$C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ となり、$C = \mathrm{e}$ を得る。よって

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

$x < 0$ の場合： $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$ である。$1 - \mathrm{e}^x$ の原始関数の一つは $x - \mathrm{e}^x$ なので、

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

考えてみよう $x<0$ の範囲には与えられた値がない。では何が D を決めるのか。

$x=0$ での連続性（continuity）が決める。右側からは $y\to \exp(1-0+1)=\mathrm{e}^2$ であり、左側からは $y\to D\exp(0-1)=D/\mathrm{e}$ である。これらを等しいとおくと $D=\mathrm{e}^3$ となるので、

$$y=\exp(x-\mathrm{e}^x+3)\qquad (x<0).$$

二つを合わせると、

$$y=\begin{cases}\exp(\mathrm{e}^x-x+1), & x\geq 0,\\ \exp(x-\mathrm{e}^x+3), & x<0.\end{cases}$$

今回は $x=0$ に角すらないことに注意しよう。どちらの式からも $y'(0)=0$ が得られ、これは $|\mathrm{e}^0-1|y=0$ と一致する。$y>0$ かつ $|\mathrm{e}^x-1|\geq 0$ なので、解はいたるところで増加し、$x=0$ に停留変曲点（stationary point of inflection）をもつ。そこでの値は $y=\mathrm{e}^2$ である。

極限

(i) $x>0$ に対して、

$$y\exp(-\mathrm{e}^x)=\exp(\mathrm{e}^x-x+1-\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^{1-x}\to 0\quad \text{ただし}x\to+\infty.$$

よって極限は 0 である。因子 $\exp(-\mathrm{e}^x)$ が二重指数的（double-exponential）な増加をちょうど打ち消し、減衰する e^{1-x} が残る。

(ii) $x<0$ に対して、

$$y\,\mathrm{e}^{-x}=\exp(x-\mathrm{e}^x+3-x)=\exp(3-\mathrm{e}^x)\to \mathrm{e}^3\quad \text{ただし}x\to-\infty,$$

である。なぜなら $\mathrm{e}^x\to 0$ だからである。よって極限は e^3 である。言い換えれば、x が負で絶対値が大きいとき、解は $\mathrm{e}^3\mathrm{e}^x$ のようにふるまう。これは予想どおりである。そこでは $|\mathrm{e}^x-1|\approx 1$ であり、方程式はほぼ $y'=y$ となるからである。

検算

- 答えを微分すると、$x>0$ では $y'=(\mathrm{e}^x-1)y$、$x<0$ では $y'=(1-\mathrm{e}^x)y$ となる。$x=1$ では $\exp(\mathrm{e}-1+1)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ である。
- 数値的に、ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いて方程式を $y(1)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\approx 15.154$ から $x=0$ まで逆向きに進めると $y(0)\approx 7.38906=\mathrm{e}^2$ が得られ、さらに $x=-5$ まで続けると、有効数字 6 桁で $\exp(x-\mathrm{e}^x+3)$ と一致する。

- 極限 (ii) については、$x = -10$ で $ye^{-x} \approx 20.0846$ となり、$e^3 \approx 20.0855$ に近い。(i) については、$x = 10$ で $e^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$ である。

よくある間違い

- $x = 1$ での条件を使って、$x = 0$ の**両側**の定数を決めてしまう。二つの区間は別々の問題であり、左側の定数は連続性からのみ決まる。
- 絶対値を外して、すべての x に対して $y' = (e^x - 1)y$ を解いてしまう。これでは $x < 0$ での曲線が誤りとなり、(ii) の極限も誤りとなる。
- $\int (e^x - 1)\,dx = e^x - x$ と正しく書いたのに、続けて $\exp(e^x - x) = e^{e^x}/x$ としてしまう（正しくは $e^{e^x}e^{-x}$ である）。

STEP のその先へ

方程式 $y' = |e^x - 1|\,y$ の係数は、$x = 0$ で連続であるが微分可能ではない。$y' = f(x, y)$ に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）（ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf））は、f が x について連続であり、y についてリプシッツ連続（Lipschitz）であることしか必要としない。そのため、この場合は一つの条件だけで実数直線全体での解が決まり、0 での連続性は自動的に成り立つ。前半では右辺そのものが $x = 0$ で跳ぶので、部分どうしをつなぐために追加の条件が必要だったのである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、一階微分方程式に対するこうした存在と一意性の問題が論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。