解答例

STEP II 2002、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと直線

> **STEP II 2002、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

鍵となる考え方

ここで扱うものはすべて内積（dot product）である。原点を通り単位方向ベクトル $\mathbf{u}$ をもつ直線が m_1 と $\pi/4$ の角をなすのは、$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$ のときであり、しかもそのときに限る。これにより前半は連立方程式（simultaneous equations）に帰着する。後半では、「垂直（perpendicular）」とは内積が 0 になることであり、空間内の 2 直線が交わるのは、それらが同一平面上（coplanar）にあり、かつ平行（parallel）でない場合に限る。同一平面上にあることは、スカラー三重積（scalar triple product）が 0 になることで表される。ひねりは、同一平面上にある場合が実は平行な場合になってしまう点にある。

解答

直線 m_3 と m_4

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$、$\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$ とおく。どちらも長さは $\sqrt{2}$ である。$\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ を、O を通る直線の方向の単位ベクトル（unit vector）とする。2 直線のなす角はそれらのなす鋭角（acute angle）であるから、条件は

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

すなわち $a+b = \pm 1$ かつ $a+c = \pm 1$ である。$\mathbf{u}$ を $-\mathbf{u}$ に置き換えても同じ直線を表し、両方の符号が反転するので、場合は 2 通りしかない。

符号が同じ場合：$a+b=1$、$a+c=1$。このとき $b=c=1-a$ であり、$a^2+b^2+c^2=1$ より

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

よって $a=1$ のとき $\mathbf{u}=\mathbf{i}$、$a=\frac{1}{3}$ のとき $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ である。

符号が異なる場合：$a+b=1$、$a+c=-1$。このとき $b=1-a$、$c=-1-a$ であり、$a^2+(1-a)^2+(1+a)^2=1$ より $3a^2+2=1$ となるが、これは実数解をもたない。

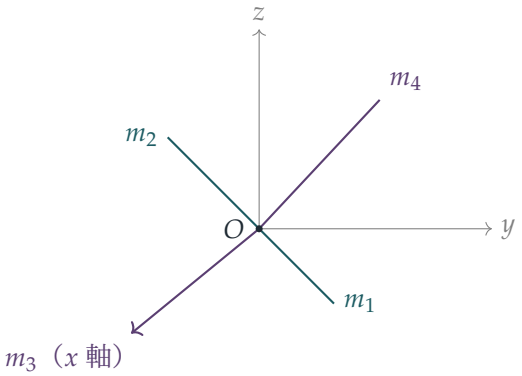
したがって、2 直線の方向は

$$m_3:\ \mathbf{i}, \qquad m_4:\ \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

である（ラベルは入れ替えてもよい）。単位ベクトル $\mathbf{e}_3=\mathbf{i}$、$\mathbf{e}_4=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$ を用いると

$$\cos\theta=\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_4=\tfrac{1}{3},$$

となる。これは正であるから、これが鋭角のほうであり、その余弦は $\frac{1}{3}$ である。



点の設定

A は m_1 上にあって O からの距離が $\lambda\sqrt{2}$ であるから、$\pm\lambda(1,1,0)$ である。座標が非負であることから、$\lambda\geq 0$ として $A=\lambda(1,1,0)$ ととることになる（$\lambda\sqrt{2}$ は距離であるから、以下を通して $\lambda\geq 0$ としてよい）。同様に $B=\lambda(1,0,1)$ である。m_3、m_4 上の座標が非負である単位点は $(1,0,0)$ と $\frac{1}{3}(1,2,2)$ である。

このうちどちらが P でどちらが Q になるかは、m_3 と m_4 のラベルの付け方による。しかしこれは問題にならない。鏡映（reflection）$(x,y,z)\mapsto(x,z,y)$ は A と B を入れ替え、$(1,0,0)$ と $\frac{1}{3}(1,2,2)$ をともに動かさないので、一方のラベル付けによる配置をもう一方に移す（その際、直線 AQ と BP の役割が入れ替わる）。垂直であることと交わることは鏡映で保たれるので、

$$A=(\lambda,\lambda,0),\quad B=(\lambda,0,\lambda),\quad P=(1,0,0),\quad Q=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}).$$

とすれば十分である。このとき

$$\overrightarrow{AQ}=(\tfrac{1}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}-\lambda,\ \tfrac{2}{3}),\qquad \overrightarrow{BP}=(1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

小問 (i)

AQ が BP に垂直であるのは、$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ のとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}&=(\tfrac{1}{3}-\lambda)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda\\&=\lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda=\lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

これが 0 になるのは $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$ のとき、すなわち

$$\lambda=1\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}=1\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

のときである。どちらの値も正であり（$\sqrt{6}<3$ であるから）、ともに非負の条件を満たす。また、この 2 次方程式にほかの解はない。よって、$AQ\perp BP$ となる λ の値はちょうど 2 つであり、題意は示された。

小問 (ii)

> **考えてみよう** 3 次元空間内の 2 直線が交わるかどうかは、どのように調べればよいだろうか。

相異なる 2 直線が交わるための必要十分条件は、それらが共通の平面上にあり、かつ平行でないことである。直線 AQ と BP が共通の平面上にあるのは、4 点 A、B、P、Q が同一平面上にあるとき、かつそのときに限り、これは $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$ のスカラー三重積が 0 になるとき、かつそのときに限る。

ここで $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$、$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$ であるから、

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}0&-\lambda&\lambda\\1-\lambda&-\lambda&0\\\frac{1}{3}-\lambda&\frac{2}{3}-\lambda&\frac{2}{3}\end{vmatrix}&=\lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\Big[(1-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)+\lambda(\tfrac{1}{3}-\lambda)\Big]\\&=\lambda\Big[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\Big]=2\lambda(\tfrac{2}{3}-\lambda),\end{aligned}$$

となる（第 1 行に沿って展開した）。したがって $\lambda\neq0$ のとき、2 直線が交わりうるのは $\lambda=\frac{2}{3}$ の場合に限られる。

ところが $\lambda=\frac{2}{3}$ のとき、

$$\overrightarrow{AQ}=(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}),\qquad\overrightarrow{BP}=(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3})=-\overrightarrow{AQ},$$

であるから、2 直線は平行である。また $\overrightarrow{BA}=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ は $\overrightarrow{BP}$ の実数倍ではないので A は BP 上になく、2 直線は同一の直線ではない。相異なる平行な 2 直線は決して交わらない。

よって、0 でないすべての λ について直線 AQ と BP は交わらず、題意は示された。（$\lambda = 0$ のときは $A = B = O$ となり、2 直線は O で交わる。問題がこの場合を除外しているのはそのためである。）

検算

- $\mathbf{i}$ が $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ と $\pi/4$ の角をなすことは見ればわかる。これは 2 次方程式の 1 つ目の解として安心できる確認である。
- $\lambda = 1 + \sqrt{2/3} \approx 1.8165$ において内積 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP}$ を数値計算すると 0 になり（誤差 10^{-16} の範囲で）、$\lambda \approx 0.1835$ においても同様である。
- $\lambda = 0.001, 0.002, \ldots, 5$ について（また P と Q のもう一方のラベル付けについても）直線 AQ と BP の最短距離を計算すると、決して 0 にはならない。0 に近づくのは $\lambda \to 0$ のときだけである。

よくある間違い

- $a + b = 1$、$a + c = -1$ の場合を忘れること。この場合からは何も得られないが、それを確かめて除外する必要がある。
- 「$\lambda = \frac{2}{3}$ のときスカラー三重積が 0 になるので、2 直線は交わる」で止めてしまうこと。同一平面上の 2 直線は平行であることもあり、ここではまさにそうなっている。

STEP のその先へ

スカラー三重積は 3×3 の行列式（determinant）であり、それが 0 になることは 3 つのベクトルが一次従属（linearly dependent）であることを意味する。ねじれの位置（skew）にある 2 直線の最短距離 $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})| / |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ も、同じ部品から組み立てられている。大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の講義では、これらの考え方は行列式、階数（rank）、部分空間（subspace）の幾何を通して統一的に扱われる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（『線形代数入門』）は、3 次元の図を豊富に用いてこの内容を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。