解答例

STEP II 2002、第 6 問

純粋数学 • 斜面内の直線

> **STEP II 2002、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

鍵となる考え方

すべては斜面（inclined plane）に関するひとつの事実にもとづく。平面内の直線が最大傾斜線（line of greatest slope）と角 ψ をなすとき、その直線が水平面となす角 γ は

$$\sin\gamma = \cos\psi \sin\beta,$$

を満たす。ここで β は最大傾斜線の傾斜角である。これさえ得られれば、問題中の各直線からそれぞれ三角方程式がひとつずつ得られ、l_1 と l_3 が垂直であることから余弦が正弦に変わる。あとは単なる代数計算である。

解答

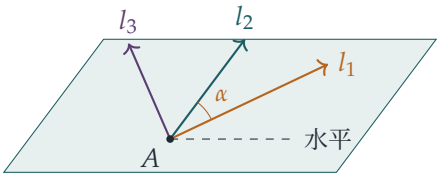
斜面内の直線の傾き

A を原点とし、z 軸が鉛直になるように座標軸をとる。$\mathbf{h}$ を P 内にある水平な単位ベクトルとし、$\mathbf{u}$ を、P 内で $\mathbf{h}$ に垂直な最大傾斜線 l_2 に沿って上向きの単位ベクトルとする。l_2 は水平面と角 β をなすから、次のようにとってよい。

$$\mathbf{h} = (1,0,0), \qquad \mathbf{u} = (0,\cos\beta,\sin\beta).$$

P 内にあり、角 ψ を $\mathbf{u}$ との間になす単位ベクトルは $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$ である。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{h}$ は正規直交（orthonormal）であり、P を張る（span）からである。その鉛直成分は $\cos\psi\sin\beta$ である。単位方向ベクトルが $\mathbf{d}$ である直線と水平面のなす角を γ とすると $\sin\gamma = |$鉛直成分：$\mathbf{d}|$ であるから、

$$\sin\gamma = |\cos\psi|\,\sin\beta. \qquad (*)$$



最初の配置

P 内で、直線 l_1 は l_2 と鋭角（acute angle）α をなし、水平面となす角は $\pi/6$ である。$(*)$ より

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

となり、示すべき式が得られる（ここで $\cos\alpha > 0$ である。α は鋭角だからである）。

考えてみよう l_3 と l_2 のなす角はいくらか？

3 本の直線はすべて同じ平面 P 内にあり、A を通る。$l_3 \perp l_1$ であるから、l_3 の方向は l_1 の方向を P 内で直角だけ回転させたものであり、したがって l_3 は l_2 と角 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ をなす（符号はどちら向きに回転させるかで決まるが、どちらでもかまわない）。いずれの場合も $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$ となる。α は鋭角だからである。よって $(*)$ を l_3 に適用すると

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

2 つの結果をそれぞれ 2 乗して加えると

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{よって} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

直線と水平面のなす角 β は $[0, \frac{\pi}{2}]$ に属するから、$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$、すなわち $\beta = \pi/3$ であり、これが示すべきことであった。（念のため述べておくと、2 つの式を辺々割ると $\tan\alpha = \sqrt{2}$ が得られ、これは確かに鋭角を与えるので、このような配置は実際に存在する。）

回転後の配置

平面は変わらないので、l_2 も $\beta = \pi/3$ も変わらない。今度は l_1 が l_2 と鋭角 θ をなし、先ほどとまったく同様に l_3 は角 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$ をなす。$(*)$ を、$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ として各直線に適用すると：

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

2ϕ は水平面とのなす角であるから $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$ であり、また $\phi \neq 0$ である。$\cos\theta > 0$ だからである。よって $\sin\phi > 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割ってよい。

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

$t = \tan^2\theta$ とおくと、$\cos^2\phi = t/4$、$\sin^2\phi = 1 - t/4$ である。θ を消去するために、$\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$ を第 1 式を 2 乗したものに用いると

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

よって $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$ である。$t = \tan^2\theta \ge 0$ かつ $\sqrt{13} > 3$ であるから、正の符号をとらなければならない。

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

これが示すべき結果である。

この解は実際に実現可能である。実際、$\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$ となるので $\phi \approx 24.7^\circ$、$2\phi \approx 49.4^\circ < 90^\circ$ であり、$\theta \approx 61.2^\circ$ は鋭角である。

検算

- 最初の配置では、$\tan\alpha = \sqrt{2}$ から $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$、$\sin\alpha = \sqrt{2/3}$ であり、$\sin\beta = \sqrt{3}/2$ とあわせると 2 つの積は $\frac{1}{2}$ と $1/\sqrt{2}$ となって、確かに正しい値になる。
- 数値的には、$\tan^2\theta \approx 3.3028$ より $\tan\theta \approx 1.8174$、$\theta \approx 61.18^\circ$ である。すると $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$ から $\phi \approx 24.68^\circ$ となり、$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35^\circ) = \sin 2\phi$ である。
- $(*)$ の極限的な場合：$\psi = 0$ のときは l_2 そのもの（角 β）、$\psi = \frac{\pi}{2}$ のときは水平な直線（角 0）を与える。

よくある間違い

- $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$ を、$\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$ の代わりに用いてしまう。正接の式が正しいのは ψ を水平面への投影図（平面図）で測った場合に限られるが、ここでの α と θ は P 内で測った角である。
- 負の解 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$ を除外し忘れる。2 乗した量が負になることはありえない。

STEP のその先へ

式 $(*)$ の正体は内積（dot product）である。直線が水平面となす角の正弦は、その単位ベクトルの鉛直方向の成分であり、そのベクトルを平面の正規直交基底で表すことですべてが片づく。平面を正規直交ベクトルの張る空間として、角を内積として捉えることは、大学 1 年で学ぶ線形代数（linear algebra）と回転の幾何学の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。