解答例

STEP II 2002、第 5 問

純粋数学 ・ ロジスティック写像の反復

STEP II 2002、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q5

鍵となる考え方

すべては放物線（parabola）$y = kx(1-x)$ にかかっている。この関数の $[0,1]$ における最大値は $x = \frac{1}{2}$ でとる $\frac{k}{4}$ である。これだけで小問 (i) は数学的帰納法（induction）により解決する。小問 (ii) と (iii) では、それぞれ不動点（fixed point）と周期 2 の点（points of period two）を求める。(iii) の要点は、x_1 を b を用いて $x_1 = ka(1-a) = ab$ と表すことである。すると $x_2 = a$ は b についての三次方程式（cubic）になり、その三次方程式には明らかな解が一つあって、それはちょうど (ii) の不動点にあたる。

解答

小問 (i)

n についての数学的帰納法を用いる。$n = 0$ の場合は仮定により成り立つ。$0 < x_n < 1$ と仮定する。このとき $x_n > 0$ かつ $1 - x_n > 0$ であるから、$x_n(1-x_n) > 0$ である。平方完成（completing the square）すると

$$x_n(1-x_n) = \tfrac{1}{4} - \left(x_n - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4}.$$

$0 < k < 4$ であるから、両辺に k を掛けても不等号の向きは変わらず、

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \tfrac{k}{4} < 1.$$

よって $0 < x_{n+1} < 1$ であり、数学的帰納法によりすべての n について $0 < x_n < 1$ が成り立つ。それぞれの仮定がどこで使われたかに注意せよ。下からの評価には $k > 0$ を、上からの評価には $k < 4$ を用いている。

小問 (ii)

数列が定数となるには $x_1 = x_0$、すなわち $a = ka(1-a)$ であればよい。$a \neq 0$ であるから両辺を a で割って $1 = k(1-a)$ を得る。さらに $a \neq 1$ であるから $1-a$ で割ることができ、

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

逆に、この k に対しては $x_1 = a$ となり、したがってそれ以降の項もすべて a である。

小問 (iii)

$b = k(1-a)$ とおくと

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

$x_2 = a$ ならば数列は周期 2 で繰り返すので、条件全体は $x_2 = a$ のみである：

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

$a \neq 0$ で割って $kb(1-ab) = 1$ を得る。$a \neq 1$ であるから $k = \dfrac{b}{1-a}$ と書けて、

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad \Longrightarrow \quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

これが求める結果である。

考えてみよう この三次方程式のどの解が見つけられるだろうか。また、その解は何を意味するだろうか。

$b = 1$ を代入すると $a - 1 + 1 - a = 0$ となるので、$b = 1$ は解である。しかし $b = 1$ は $k(1-a) = 1$ を意味し、これは小問 (ii) の不動点である。このとき $x_1 = ab = a$ となる。したがって、追加の条件 $x_1 \neq a$、すなわち $ab \neq a$ は、ちょうど $b \neq 1$ と同値である。因数 $b-1$ をくくり出すと

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)(ab^2 + (a-1)b + (a-1)),$$

となる。これは展開すれば確かめられる。よって b は

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

の 1 以外の解でなければならない。$a \neq 0$ であるから、これは確かに二次方程式（quadratic）であり、

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

実数解をもつためには $(1-a)(1+3a) \geq 0$、すなわち $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ が必要である。$a \neq 0, 1$ と合わせると、$-\frac{1}{3} \leq a < 1$、$a \neq 0$ が残る。a がそれ以外の値のときは、条件を満たす実数 k は存在しない。

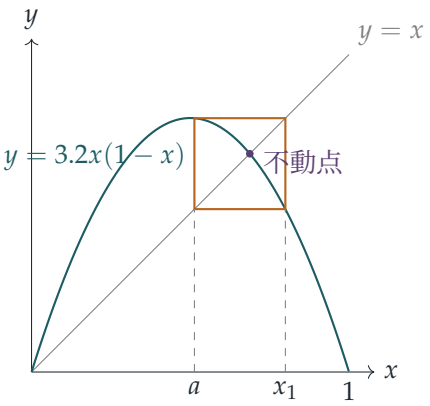
この範囲では $1-a > 0$ であるから、$1-a$ で割り、$\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a) = \sqrt{(1+3a)/(1-a)}$ を用いると、$k = b/(1-a)$ はすっきりした形になる：

$$\boxed{k = \frac{1}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right), \qquad -\tfrac{1}{3} \leq a < 1,\ a \neq 0.}$$

最後に一つ確認しておくべきことがある。どちらの値も除外すべき解 $b = 1$ でないことを確かめなければならない。この二次方程式が $b = 1$ を解にもつのは $a + (a-1) + (a-1) = 0$、すなわち $a = \frac{2}{3}$ のときに限る。このとき $\sqrt{(1+3a)/(1-a)} = 3$ であり、二つの値は $k = 3$（これは $b = 1$、すなわち不動点であるから除外される）と $k = -\frac{3}{2}$ である。したがって：

- $a = \frac{2}{3}$ のとき、可能なのは $k = -\frac{3}{2}$ のみである；
- $a = -\frac{1}{3}$ のとき、二つの符号は一致して $k = -\frac{3}{2}$ となる；
- それ以外の許される a については、どちらの符号も真の 2 周期軌道を与える。

下の図は、$k = 3.2$ の場合のそのような周期軌道の一つを示している。軌道（orbit）は $a \approx 0.513$ と $x_1 \approx 0.800$ の間を行き来し、放物線と直線 $y = x$ の間に正方形を描く。



検算

- $a = 0.7$ とする。公式から $k \approx 3.0104$ または $k \approx -1.5818$ を得る。$k \approx 3.0104$ とすると $x_1 \approx 0.6322$、さらに $x_2 \approx 0.7000$ となるので、軌道は確かに周期 2 をもつ。

- $a = \frac{2}{3}$ のとき、$k = 3$ とすると $x_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ となり、予想どおり不動点である。$k = -\frac{3}{2}$ とすると $x_1 = -\frac{1}{3}$、$x_2 = -\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ となり、真の 2 周期軌道である。
- 数値的に、無作為に選んだ数千個の $a \in [-\frac{1}{3}, 1)$ について、どちらの符号でも $x_2 = a$ が成り立った。この区間の外の a については、k を走査しても不動点 $k = 1/(1-a)$ 以外の解は見つからなかった。

よくある間違い

- 三次方程式が不動点に対応する解を含んでいるはずだということを忘れる。解 $b = 1$ に気づくことこそが、この三次方程式を易しくする鍵である。
- 実数条件 $-\frac{1}{3} \le a < 1$ を書き落とす。あるいは、$a = \frac{2}{3}$ のとき k の二つの値のうち一方が不動点であり、捨てなければならないことに気づかない。
- (i) で $x_{n+1} \le \frac{1}{4}k$ だけを示し、$k < 4$ であるからこれが 1 より真に小さいことを述べない。

STEP のその先へ

これはロジスティック写像（logistic map）であり、単純な規則がきわめて豊かな振る舞いを生み出す典型例である。通常の範囲 $0 < k \le 4$ の k に対して、ここで求めた 2 周期軌道が存在するのはちょうど $k > 3$ のときである。$k = 3$ で不動点は安定性（stability）を失い、二つの点に分裂する。これが最初の**周期倍分岐**（*period-doubling bifurcation*）である。その後も周期倍分岐が続き、それが起こる k の値は等比数列的に（ファイゲンバウム（Feigenbaum）定数で決まる比率で）密集していき、やがて写像はカオス的（chaotic）になる。Strogatz の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は、この話の全体を大学 1 年生の水準で語っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。