解答例

STEP II 2002、第 4 問

純粋数学 • 積分から導く不等式

> **STEP II 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q4

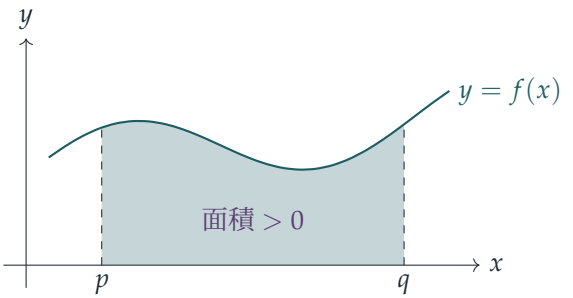
鍵となる考え方

$a > 0$ かつ $b^2 < 4ac$ を満たす 2 次式（quadratic）$as^2 - bs + c$ は実数解をもたず、最高次の係数（leading coefficient）が正であるから、**すべての**実数 s に対して正である。s に何を代入しても（x でも $\sin x$ でも $1/x$ でも）、得られる関数は正であり、したがって任意の区間におけるその積分は正である。あとは各小問ごとに、積分の結果が求める不等式に現れる数そのものになるように、代入するものと区間を選べばよい。

解答

最初の図

積分 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$ は、$x = p$ から $x = q$ までの、曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の符号付き面積（signed area）である。軸より上の面積は正、下の面積は負として数える。$p < x < q$ の全体で $f(x) > 0$ ならば、そこでは曲線全体が軸より上にあるので、その領域に負の部分はなく、しかも本当に（0 でない）面積をもつ。よって積分は真に正である。（この問題に現れる関数はすべて連続（continuous）なので、面積はきちんと定義される。）



すべての小問で使う事実

$a > 0$ かつ $b^2 < 4ac$ として、$g(s) = as^2 - bs + c$ とおく。平方完成（completing the square）すると

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$a > 0$ より第 1 項は 0 以上であり、$4ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$ より第 2 項は真に正である。したがって、すべての実数 s に対して $g(s) > 0$ である。

小問 (i)

$f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$ とおくと、これはすべての x に対して正である。積分区間は好きに選んでよく、$[0, 1]$ をとると最も簡単な数が得られる：

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

両辺に 6 を掛けると $2a - 3b + 6c > 0$、すなわち $3b < 2a + 6c$ となり、示すべき不等式が得られる。

小問 (ii)

今度は $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$ である。g はすべての実数において正であるから、当然 $\sin x$ においても正であり、すべての x に対して $f(x) > 0$ となる。

考えてみよう どの区間で積分すればよいだろうか？

目標の不等式では、π が a と c には掛かっているが b には掛かっていない。$[0, \frac{\pi}{2}]$ では、$\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ には π が現れないが、$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ と $\int 1\,\mathrm{d}x$ には現れる。$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ を用いると

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

したがって

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

両辺に 4 を掛けると $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$、すなわち $4b < (a + 2c)\pi$ となり、示すべき不等式が得られる。

小問 (iii)

考えてみよう 積分すると $\ln(q/p)$、$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$、$q-p$ を与える関数は何だろうか？

これらは $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$、$\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$ である。そこで

$$f(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c=g\left(\frac{1}{x}\right),$$

とおく。この関数は $x>0$ で定義されて連続であり、g がいたるところで正であるから、そこで正である。$q>p>0$ より区間 $[p,q]$ は $x=0$ を含まないので

$$\begin{aligned}0<\int_p^q\left(\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}+c\right)\mathrm{d}x&=\left[-\frac{a}{x}-b\ln x+cx\right]_p^q\\&=a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-b\ln\frac{q}{p}+c(q-p).\end{aligned}$$

整理すると $b\ln(q/p)<a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+c(q-p)$ となり、示すべき不等式が得られる。（条件 $p>0$ により、両方の対数が定義された状態で $\ln q-\ln p=\ln(q/p)$ と書くこともできる。）

検算

$a=b=c=1$ とすると $b^2=1<4=4ac$ である。このとき (i) は $3<8$、(ii) は $4<3\pi\approx 9.42$、(iii) は $p=1$、$q=2$ として $\ln 2\approx 0.693<\frac{1}{2}+1=1.5$ を主張する。いずれも成り立つ。さらに、条件を満たす 20 000 組の無作為な (a,b,c)（b^2 が $4ac$ よりわずかに小さい場合を含む）について 3 つの不等式をすべて確かめ、各積分の値をシンプソンの公式（Simpson's rule）で確認した。なお、条件がなければ不等式は成り立たないことがある：$a=1$、$b=10$、$c=1$ では $30>8$ となり、(i) が成り立たない。

よくある間違い

- $f>0$ であることの根拠を述べ忘れる。条件 $a>0$ と $b^2<4ac$ こそが 2 次式を正にするものであり、このことは明記しなければならない。
- (ii) で、$\frac{\pi}{4}$ とすべきところを $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ としてしまう。
- (iii) で、$p>0$ によって（f が定義されない）$x=0$ が区間から除かれることに触れない。

STEP のその先へ

「正の連続関数の積分は正である」という原理は、大学の最初の解析学（analysis）の講義でリーマン積分（Riemann integral）について証明される基本的な性質の一つである。これは線形性（linearity）とあわせて、多くの古典的な不等式の源となっている。その中には積分形のコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）も含まれ、これは平方 $(f+tg)^2 \geq 0$ を積分し、ここと同じ判別式（discriminant）の議論を用いることで得られる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、この観点から積分を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。