解答例

STEP II 2002、第 2 問

純粋数学 ・ 相反方程式

> **STEP II 2002、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

鍵となる考え方

係数（coefficient）を外側から内側へ順に見ていく。1 と 1、次に 5 と -5、そして中央に 4 がある。係数が対ごとに一致するか符号が反転しているということは、z の中央のべきで割ると $z^k + z^{-k}$ と $z^k - z^{-k}$ の組合せだけが残るということであり、これらはいずれも $w = z - z^{-1}$ の多項式（polynomial）として表せる。これにより次数（degree）は半分になる。8 次方程式も同じ構造をもち、次数を下げるとその結果が再び同じ構造をもつことがわかる。したがって、この技法を 2 回用いることになる。

解答

四次方程式

定数項が 1 なので $z = 0$ は根ではない。よって z^2 で割ることができる：

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

$w = z - z^{-1}$ とおくと $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$ であるから、$z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$ となる。これを代入すると

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

となり、求める式が得られる。これは $(w + 2)(w + 3) = 0$ と因数分解できるので、$w = -2$ または $w = -3$ である。

z に戻すために、$z - z^{-1} = w$ の両辺に z を掛けると

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

- $w=-2$ のとき：$z^2+2z-1=0$ より $z=-1\pm\sqrt{2}$。
- $w=-3$ のとき：$z^2+3z-1=0$ より $z=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{13}\right)$。

これら 4 つの相異なる値が四次方程式（quartic）の根である：

$$z=-1\pm\sqrt{2},\qquad z=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

8 次方程式

ここでも $z=0$ は根ではないので、z^4 で割り、係数を中央に関して対称に組にする：

$$2\left(z^4+z^{-4}\right)-3\left(z^3-z^{-3}\right)-12\left(z^2+z^{-2}\right)+12\left(z-z^{-1}\right)+22=0.$$

（組を確認しておく：z^8 と z^0 の係数はともに 2、z^7 の係数は -3 で z^1 の係数は $+3$、z^6 と z^2 の係数はともに -12、z^5 の係数は 12 で z^3 の係数は -12 である。）

各括弧を $w=z-z^{-1}$ で表す必要がある。$z^2+z^{-2}=w^2+2$ はすでに得ている。3 乗すると

$$w^3=z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}\quad\Longrightarrow\quad z^3-z^{-3}=w^3+3w,$$

であり、z^2+z^{-2} を 2 乗すると

$$z^4+z^{-4}=\left(z^2+z^{-2}\right)^2-2=(w^2+2)^2-2=w^4+4w^2+2.$$

これらを代入すると

$$\begin{aligned}0&=2(w^4+4w^2+2)-3(w^3+3w)-12(w^2+2)+12w+22\\&=2w^4-3w^3-4w^2+3w+2.\end{aligned}$$

考えてみよう w の四次方程式が残った。これで何か得をしたのだろうか？

得をしている。係数 2, −3, −4, 3, 2 を見てみよう。これは先ほどとまったく同じパターン（外側の組は等しく、その内側の組は符号が逆）をもっているので、同じ技法が一段下でも使える。$w=0$ は根ではないので、w^2 で割ると

$$2\left(w^2+w^{-2}\right)-3\left(w-w^{-1}\right)-4=0.$$

$v=w-w^{-1}$ とおくと $w^2+w^{-2}=v^2+2$ であるから

$$2(v^2+2)-3v-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2v^2-3v=0\quad\Longleftrightarrow\quad v(2v-3)=0.$$

よって $v=0$ または $v=\frac{3}{2}$ である。ここから $w^2-vw-1=0$ を用いて順に戻していく：

- $v = 0$ のとき：$w^2 = 1$ より $w = \pm 1$。
- $v = \frac{3}{2}$ のとき：$2w^2 - 3w - 2 = 0$、すなわち $(2w+1)(w-2) = 0$ より $w = 2$ または $w = -\frac{1}{2}$。

最後にもう一度、$z^2 - wz - 1 = 0$ を用いて戻す：

- $w = 1$ のとき：$z^2 - z - 1 = 0$ より $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = -1$ のとき：$z^2 + z - 1 = 0$ より $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$。
- $w = 2$ のとき：$z^2 - 2z - 1 = 0$ より $z = 1 \pm \sqrt{2}$。
- $w = -\frac{1}{2}$ のとき：$2z^2 + z - 2 = 0$ より $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$。

各二次方程式 $z^2 - wz - 1 = 0$ の判別式（discriminant）は $w^2 + 4 > 0$ であるから、これらの根はすべて実数であり、8 つの値は相異なる。8 次の多項式の根は高々 8 個なので、これらがすべての根である：

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

検算

- $z^2 - wz - 1 = 0$ から得られる根の組はいずれも積が -1 であり、これで計算をすばやく確認できる。たとえば $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$ である。
- 8 次方程式の根の和は $\frac{3}{2}$（z^7 の係数を z^8 の係数で割って符号を変えたもの）になるはずである。4 つの組の寄与は $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ であり、一致する。
- 数値的に確かめると、$z = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{17}) \approx 0.7808$ を代入した 8 次多項式の値は 10^{-9} 以内で 0 になる。残りの 7 つの根や四次方程式の 4 つの根についても同様である。

よくある間違い

- $z^3 - z^{-3} = w^3$ と書いてしまうこと。交差項から余分な $3w$ が生じる。
- w の四次方程式で止まってしまい、係数が同じ対称性をもつことに気づかずに試行錯誤で因数分解しようとすること。
- w（あるいは v）の値だけを答えて、z に戻すのを忘れること。

STEP のその先へ

係数を逆順に読んでも同じになる（あるいは符号の交代を除いて同じになる）多項式は、**相反多項式**（reciprocal polynomial）あるいは**回文多項式**（palindromic polynomial）とよばれる。その根は $z \mapsto 1/z$ または $z \mapsto -1/z$ で結ばれた組として現れ、ここで用いた置換はまさにこの対称性によって可能になる次数下げである。ガロア理論（Galois theory）の言葉でいえば、これは方程式が根のある変換群のもとで不変であるという観察であり、そのため、より小さな方程式の塔を通じて段階的に解くことができる。ここで起きたこと、すなわち 8 次、4 次、2 次という流れはまさにそれである。こうした考え方の発展を見るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。