解答例

STEP II 2002、第 13 問

確率・統計 ・ 変換された分布関数

> **STEP II 2002、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q13

鍵となる考え方

力学の分野に置かれてはいるが、これは分布関数（distribution function）の変換に関する確率の問題である。すべては一つの公式に帰着する。G を微分すると $G'(y) = f(y) \cdot \dfrac{2}{(2-F(y))^2}$ となる。ここで $f = F'$ は X の確率密度関数（density）である。つまり、Y の確率密度関数は、X の確率密度関数に $\frac{1}{2}$ と 2 の間に収まる重みを掛けたものである。これが得られれば、Y に関する各期待値（expectation）は X の確率密度関数に $[\frac{1}{2}, 2]$ 内の重みを掛けたものの積分となり、被積分関数を比較することで不等式が導かれる。条件 $a > 0$ は、被積分関数を非負にするためのものである。

解答

G の性質

問題の意図に従い、X は $[a, b]$ 上で確率密度関数 $f(y) = F'(y) \geq 0$ をもち、X の確率はすべて $[a, b]$ に集中していると仮定する。

$F(a) = 0$ かつ $F(b) = 1$ であるから、

$$G(a) = \frac{0}{2-0} = 0, \qquad G(b) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

商の微分法（quotient rule）により、

$$G'(y) = \frac{F'(y)(2-F(y)) - F(y)(-F'(y))}{(2-F(y))^2} = \frac{2F'(y)}{(2-F(y))^2}.$$

分布関数は単調非減少であるから $F'(y) \geq 0$ であり、分子は非負である。分母は $2 - F(y) \geq 1$ の 2 乗であるから正である。よって $G'(y) \geq 0$ である。

評価については、F は分布関数であるから $0 \le F(y) \le 1$ である。したがって

$$1 \le 2 - F(y) \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le (2 - F(y))^2 \le 4 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \le \frac{2}{(2 - F(y))^2} \le 2,$$

となる。ここで、すべての量が正であるから 2 乗しても不等号の向きは保たれ、逆数をとると向きが反転し、さらに 2 を掛けて尺度を変えている。これが求める二重不等式である。

以上の $G(a) = 0$、$G(b) = 1$、および G が単調非減少であることから、G は $[a, b]$ 上の正真正銘の分布関数であり、確率変数 Y は意味をもつ。その確率密度関数は

$$g(y) = G'(y) = w(y)\, f(y), \qquad \text{ただし} w(y) = \frac{2}{(2 - F(y))^2} \in [\tfrac{1}{2}, 2].$$

$\mathrm{E}(Y)$ の評価

> **考えてみよう** 不等式 $\frac{1}{2} \le w(y) \le 2$ に $yf(y)$ を掛けても不等号の向きが保たれるのはなぜか。

それは $[a, b]$ 上で $yf(y) \ge 0$ だからである。実際、$f(y) \ge 0$ であり、$y \ge a > 0$ である。仮定 $a > 0$ が使われるのはまさにこの箇所である。よって

$$\tfrac{1}{2}\, yf(y) \le y\, w(y) f(y) \le 2\, yf(y) \qquad \text{ただし} a \le y \le b,$$

であり、$[a, b]$ 上で積分しても不等式は保たれる。

$$\tfrac{1}{2} \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; \int_a^b y\, g(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; 2 \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y,$$

すなわち

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\, \mathrm{E}(X),$$

となり、示すべきことが得られた。

$\mathrm{Var}(Y)$ の評価

同様に、$y^2 f(y) \ge 0$ である（これには $f \ge 0$ だけが必要である）から、$w(y) \le 2$ にこれを掛けて積分すると

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_a^b y^2\, w(y) f(y)\, \mathrm{d}y \le 2 \int_a^b y^2 f(y)\, \mathrm{d}y = 2\, \mathrm{E}(X^2).$$

引かれる項については、$(\mathrm{E}(Y))^2$ の**下からの**評価が必要である。前の小問より $\mathrm{E}(Y) \ge \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)$ であり、$X \ge a > 0$ より $\mathrm{E}(X) > 0$ である。両辺とも正であるから、2 乗しても問題ない。

$$(\mathrm{E}(Y))^2 \ge \tfrac{1}{4} (\mathrm{E}(X))^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &\le 2\,\mathrm{E}(X^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2(\mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\,\mathrm{Var}(X) + \tfrac{7}{4}(\mathrm{E}(X))^2,\end{aligned}$$

となる。3 行目では $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$ を用いた。これが求める分散（variance）の評価である。

検算

X を $[1,3]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う確率変数とすると、$F(y) = \frac{1}{2}(y-1)$、$\mathrm{E}(X) = 2$ である。$Y \ge 1$ であるから $\mathrm{E}(Y) = 1 + \int_1^3 (1 - G(y))\,\mathrm{d}y$ であり、$u = F(y)$ と置換すると

$$\mathrm{E}(Y) = 1 + 2\int_0^1 \frac{2(1-u)}{2-u}\,\mathrm{d}u = 1 + 4(1 - \ln 2) \approx 2.227,$$

となり、1 と 4 の間に十分収まっている。直観的には、w は F が小さいところでは小さく、F が 1 に近いところでは大きいので、Y は区間の上側に偏り、この例では $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$ となる。また、ランダムな区間上のランダムなべき乗型分布 300 個について、$\frac{1}{2}\mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ と分散の評価がともに成り立つことを数値的に確かめた。観測された比 $\mathrm{E}(Y)/\mathrm{E}(X)$ はおよそ 0.92 から 1.31 の間にあった。

よくある間違い

- $a > 0$ がなぜ重要かを忘れること。X が負の値をとりうるなら、$yf(y)$ が負になりうるので、それを掛けると不等号の向きが反転してしまう。
- $\mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$ を使って $\mathrm{Var}(Y)$ を評価すること。項 $(\mathrm{E}(Y))^2$ は引かれるので、必要なのは上からの評価ではなく下からの評価である。
- $(y-\mu)^2$ を g で積分して $\mathrm{Var}(Y)$ と $\mathrm{Var}(X)$ を直接比較しようとすること。二つの分散は異なる平均を用いるので、代わりに $\mathrm{E}(Y^2)$ を扱うべきである。

STEP のその先へ

$g = wf$ と書くことは、測度の変換（change of measure）の簡単な例である。新しい分布は古い分布に関する密度（**尤度比**（likelihood ratio）、あるいはラドン＝ニコディ

ム（Radon–Nikodym）導関数）をもち、その比に対する評価はそのまま期待値の評価に移る。この考え方は、統計学における重点サンプリング（importance sampling）や、金融数学で用いられる確率測度の変換の基礎となっている。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、分布関数、確率密度関数、期待値を、この話題をさらに進めるのにちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。