解答例

STEP II 2002、第 11 問

力学 ・ 摩擦と限界つり合い

> **STEP II 2002、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q11

鍵となる考え方

最初の部分は重心（centre of mass）を求める積分をそのまま計算するだけであり、置換（substitution）$t = x/l$ を用いれば一行で済む。はしご（ladder）の部分では、「両端で限界状態にある」という条件により、4 つの接触力がすべてただ 1 つの未知数の定数倍で表される。したがって 2 方向に力を分解し、A のまわりのモーメント（moment）をとれば、ただちに $\tan\theta$ が得られる。最後の部分ではもう 1 つ考え方が必要である。棒は立てる角度が急であるほど安定するので、「$\theta < \pi/4$ のすべての θ で滑る」ということは、限界角が $\pi/4$ 以上であることを意味する。

解答

重心

B から距離 x の位置にある長さ δx の微小部分の重さは $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$ である。$t = x/l$（したがって $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$）とおくと、全体の重さは

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

となり、当然そうなるべき値である（$\alpha > 0$ であるからこの積分は収束（converge）する）。B のまわりの重力のモーメントは

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

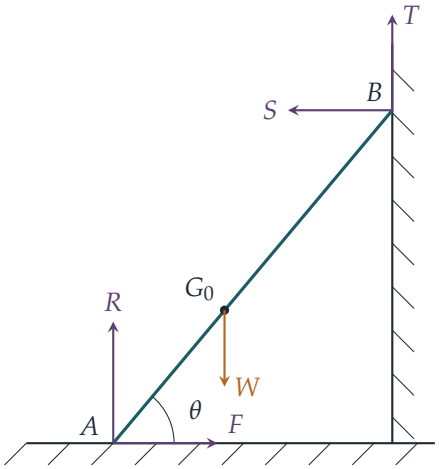
これを W で割ると、重心 G_0 は B から距離 $\alpha l/(\alpha+1)$ の位置にあり、求める結果が得られる。よって重心は A から

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

の距離にある。A のまわりのモーメントを考える際にはこちらを用いる。

両端での限界つり合い

棒を剛体の棒（rigid rod）とみなし、A と B はともに粗い接触であるとする。棒が滑るとき、A は壁から遠ざかり、B は下に動く。したがって摩擦力（friction）は A では壁に向かう向きに、B では上向きにはたらく。床が A において及ぼす垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦力を F とし、壁が B において及ぼす垂直抗力を S、摩擦力を T とする。重力は A から距離 $l/(\alpha+1)$ の点 G_0 にはたらく。



水平方向と鉛直方向に力を分解し、さらに A のまわりのモーメントをとる（重力は A から水平距離 $d\cos\theta$ の位置にはたらき、B は高さ $l\sin\theta$、水平距離 $l\cos\theta$ の位置にある）と、

$$F = S,$$
$$R + T = W,$$
$$S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta = W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta.$$

両端で限界状態にあるということは、$F = \mu R$ かつ $T = \mu S$ を意味する。すると $S = F = \mu R$、$T = \mu S = \mu^2 R$ であり、鉛直方向の式から

$$R(1+\mu^2) = W, \qquad \text{よって} \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}, \quad T = \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

モーメントの式を $l\cos\theta$ で割って代入すると、

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta+\frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}=\frac{W}{1+\alpha}\quad\Longrightarrow\quad \mu\tan\theta=\frac{1+\mu^2}{1+\alpha}-\mu^2=\frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

すなわち

$$\tan\theta=\frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

となり、求める結果が得られる。この角を θ_0 とし、$t_0=\tan\theta_0$ とおく。

μ の最大値

考えてみよう なぜ「$\theta<\pi/4$ のすべての θ で滑る」という条件が、θ_0 に関する条件に言い換えられるのだろうか。

つり合いが可能であるのは $\tan\theta\geq t_0$ のときであり、かつそのときに限ることを示す。$t=\tan\theta$、$k=1/(1+\alpha)$ とおくと、モーメントの式は $St+T=kW$ となる。摩擦の法則は $F\leq\mu R$ および $|T|\leq\mu S$ である。

必要性（*necessity*）。$T\leq\mu S$ と $S=F\leq\mu R=\mu(W-T)$ から $T\leq\mu^2(W-T)$ が得られるので、$T\leq\mu^2 W/(1+\mu^2)$ である。また $S\leq\mu(W-T)$ であるから、

$$kW=St+T\leq\mu t(W-T)+T=\mu tW+(1-\mu t)T.$$

$\mu t<1$ のとき、T に関する上の評価を用いると $kW\leq W(\mu t+\mu^2)/(1+\mu^2)$ となり、これを整理すると $t\geq t_0$ が得られる。$\mu t\geq 1$ のときは、$\mu t_0=(1-\alpha\mu^2)/(1+\alpha)<1$ であるから、いずれにせよ $t\geq 1/\mu>t_0$ である。どちらの場合も、つり合っていれば $t\geq t_0$ でなければならない。

十分性（*sufficiency*）。$t\geq t_0$（かつ $t>0$）であるとする。壁の摩擦を限界状態 $T=\mu S$ とし、モーメントの式から $S=kW/(t+\mu)$、さらに $F=S$、$R=W-T$ とおく。残る条件は $S\leq\mu R$ だけであり、これは $S(1+\mu^2)\leq\mu W$、すなわち $k(1+\mu^2)\leq\mu(t+\mu)$ と同値で、ちょうど $t\geq t_0$ にほかならない。（このとき $R>0$ も成り立つ。）

したがって、棒が角 θ で滑るのは $\tan\theta<t_0$ のときであり、かつそのときに限る。「$\theta<\pi/4$ のすべての θ で滑る」とは $t_0\geq 1$ を意味する。実際、$t_0\geq 1$ ならば $\theta<\pi/4$ を満たすすべての θ について $\tan\theta<1\leq t_0$ であり、$t_0<1$ ならば $\max(t_0,0)<\tan\theta<1$ を満たす角はいずれも $\pi/4$ より小さいにもかかわらずつり合っている。

$\alpha=\frac{3}{2}$ のとき、

$$t_0=\frac{1-\frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu}=\frac{2-3\mu^2}{5\mu}\geq 1\iff 3\mu^2+5\mu-2\leq 0\iff(3\mu-1)(\mu+2)\leq 0,$$

ここで $5\mu > 0$ を掛けた。$\mu + 2 > 0$ であるから、これが成り立つのはちょうど $\mu \leq \frac{1}{3}$ のときである。とりうる最大値は

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

検算

- $\alpha = 1$ のとき棒は一様であり、公式は $\tan\theta = (1-\mu^2)/(2\mu)$ となる。これは両端の摩擦係数が等しい一様なはしごについてよく知られた結果である。
- $\mu = \frac{1}{3}$、$\alpha = \frac{3}{2}$ のとき、$t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$ がちょうど成り立つので、限界角は $\pi/4$ である。数値的には、$\mu = 0.332$ のとき $t_0 \approx 1.004$、$\mu = 0.334$ のとき $t_0 \approx 0.996$ となる。
- $\alpha \to \infty$ のとき質量は B に集中し（$d \to 0$）、任意の $\mu > 0$ に対して $\tan\theta$ は負になる。つまり棒はどんな角度でも立っていられる。このとき重力はほぼ壁の位置にはたらくので、これは理にかなっている。

よくある間違い

- モーメントの式で $\alpha l/(\alpha+1)$ を A からの距離として用いてしまう。この値は B から測った距離である。
- 壁の摩擦力を下向きにとってしまう。棒が滑るとき B は下に滑るので、B において棒にはたらく摩擦力は上向きである。
- 最後の不等式の向きを逆にしてしまう。棒は**急な**ほど安定するので、「$\pi/4$ より小さい角で滑る」ためには $\tan\theta_0 \geq 1$ が必要であり、μ が最大のとき θ_0 はちょうど $\pi/4$ になる。

STEP のその先へ

上で行った必要性と十分性の議論は、実は小さな**線形計画法**（linear programming）の問題である。摩擦の法則は許容される力全体の凸（convex）な領域を定め、モーメントの式が表す直線がその領域と交わるときにつり合いが可能となる。この問題のように、つり合いの式だけでは力が決まらない不静定（statically indeterminate）な問題は、大学 1 年次の力学や工学で定番の題材である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦、トルク、剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。