解答例

# STEP II 2002、第 10 問

力学 ・ 運動学と最適化

**STEP II 2002、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/02-s2-q10

## 鍵となる考え方

総距離が決まっているので、レースの所要時間 $T$ と切り替えの時刻 $t$ はただ一つの方程式で結びついている。分母を払うとこれは $t$ の二次方程式（quadratic）になり、時間 $T$ が実現可能であるのはこの二次方程式が実数解をもつときに限る。判別式（discriminant）の条件から、微積分を使わずに $T$ の最小値が直接得られる。後半では、二人の走者の位置を時刻の関数として求めれば、両者の距離は区分的（piecewise）な二次関数となるので、通常の方法で最大化すればよい。

## 解答

以下、距離の単位は km、時間の単位は時間とし、$42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$ である。

### レース時間の最小値

第一の走者は最初の $t$ 時間で $13t$ 進み、残りの $T-t$ 時間で $(14+\frac{2t}{T})(T-t)$ 進む。したがって

$$13t + \left(14 + \frac{2t}{T}\right)(T-t) = \frac{339}{8}.$$

展開すると $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$、すなわち

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

$T > 0$ を掛けて $t$ の累乗ごとに整理すると

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

**考えてみよう** 求めたいのは最小の $T$ であるが、$T$ は $t$ の関数として与えられてはいない。そもそもどのような $T$ の値が可能なのかを、どうすれば判定できるだろうか。

$T$ の値が実現されるのは $(*)$ が実数解 $t$ をもつときに限るので、その判別式は非負でなければならない：

$$T^2 - 8\Big(\frac{339}{8}T - 14T^2\Big) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

$T > 0$ であるから、$T \geq 3$ が従う。

この下限は実際に達成される。$T = 3$ のとき判別式は 0 となり、$(*)$ は

$$2t^2 - 3t + \Big(\frac{1017}{8} - 126\Big) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\Big(t - \frac{3}{4}\Big)^2 = 0,$$

となるので、$t = \frac{3}{4}$ である。これは 0 と $T$ の間にあるので、実際に実行可能なレース計画である。すなわち、速さ 13 で 45 分走り、残りの $2\frac{1}{4}$ 時間を速さ $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$ で走る。実際、$13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$ である。以上より、$T$ のとりうる最小値は 3 であり、題意が示された。

（同値な方法として、$(*)$ を陰関数微分（implicit differentiation）して $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$ とおくと $T = 4t$ が得られ、これを代入し戻すと $T = 3$ となる。判別式による議論には、3 が単なる停留値（stationary value）ではなく大域的最小値（global minimum）であることまで証明できるという利点がある。）

### 二人の距離の最大値

スタートからの経過時間を $\tau$ とする。第二の走者の速さはある定数 $k$ を用いて $16 - k\tau$ と表されるので、走った距離は

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

3 時間でゴールすることから $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$ となり、$\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$、よって $k = \frac{5}{4}$ である。したがって $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$ であり、速さは 16 から 12.25 まで減少し、常に正である。

第一の走者も 3 時間かかるので、前半の結果から $t = \frac{3}{4}$ である。この走者の走った距離は

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}(\tau - \frac{3}{4}), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

$d = s_2 - s_1$ とおく。第二の走者のほうが最初は速いので、$d \geq 0$ となることが予想される。

$0 \le \tau \le \frac{3}{4}$ **のとき：**$d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$ であり、$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$ である。よって $d$ はこの区間で増加し、$d\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$ に達する。

$\frac{3}{4} \le \tau \le 3$ **のとき：**

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}(9 + 12\tau - 5\tau^2) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

これは上に凸な放物線で、頂点は $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ にあり、これは $\left[\frac{3}{4}, 3\right]$ の内部にある。（同値な見方として、差が広がらなくなるのは二人の速さが等しくなるとき、すなわち $16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$ のときである。）そこでは

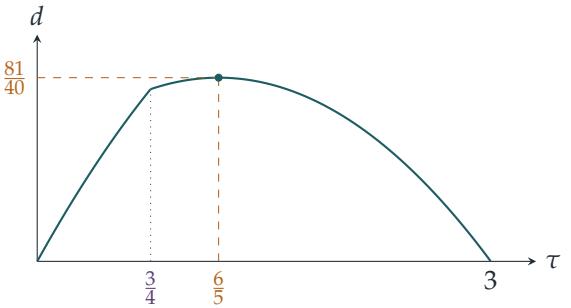
$$d\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

因数分解した形から、この区間全体で $d \ge 0$ であり、当然ながらゴールで 0 まで減少することがわかる。

二つの区間を比べると、$\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$ である。よって二人の走者の距離の最大値は

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \mathrm{km} = 2.025\ \mathrm{km}},$$

であり、これはレース開始から 1.2 時間（72 分）後に、第二の走者が先行している状態で達成される。




## 検算

- 二人とも $\tau = 3$ でゴールし、式からも当然 $d(3) = 0$ となる。
- 後半の区間での最大値は、ちょうど二人の速さが等しくなる（ともに 14.5）ときに生じる。これは差が広がらなくなるための自然な条件である。
- 数値的確認：$t$ の細かい格子上で $T$ についての二次方程式を解くと、$T$ の最小値は $t = 0.75$ において 3.000 となる。また $[0, 3]$ 内の 300 000 個の時刻で $d$ を計算すると、$\tau = 1.2$ において最大値 2.025 をとり、全体を通じて $d \ge 0$ である。

## よくある間違い

- 第一の走者の最短時間の計画を使う際に、「走行時間が 3 時間」という条件こそが $t = \frac{3}{4}$ を定めていることに気づかない。
- 折れ目 $\tau = \frac{3}{4}$ だけで最大値を考えてしまう。切り替えの後も差は広がり続ける。第二の走者は $\tau = \frac{6}{5}$ までは 14.5 より速いからである。
- 第二の走者の距離を $16\tau - k\tau^2$ と書いてしまい、一次関数的に減少する速さを積分したときに出る $\frac{1}{2}$ を忘れる。

## STEP のその先へ

前半は、$F(t, T) = 0$ によって陰的に与えられた制約のもとでの最適化問題である。「どのような $T$ に対して解 $t$ が存在するか」と問うことは、陰関数定理（implicit function theorem）や、より一般にはラグランジュ（Lagrange）の未定乗数法（Lagrange multipliers）の背後にある考え方である。最適点では制約の等位曲線（level curve）上で $\partial F/\partial t = 0$ となり、これはまさにここでの重解（double root）の条件である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は運動学（kinematics）を一貫して微積分を用いて扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 形式の最適化問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。