解答例

STEP II 2002、第 1 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2002、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q1

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）により $1-\cos 2\theta$ は $2\sin^2\theta$ に変わり、$\operatorname{cosec}^2\theta$ は見ただけで積分できる式である。誘導として与えられている置換（substitution）$x=\sin 2\theta$ は、$\sqrt{1-x^2}$ が $\cos 2\theta$ になるように仕組まれており、これによって第 2 の積分は第 1 の積分に帰着される。最後の積分については、積分区間の端 1 と $2/\sqrt{3}$ がそれぞれ 1 と $\sqrt{3}/2$ の逆数（reciprocal）になっていることから、$y=1/x$ を試すべきだと強く示唆される。

解答

第 1 の積分

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ であるから $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ であり、これは $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上で正なので、被積分関数（integrand）はこの区間で問題なく定義される。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の積分

$x = \sin 2\theta$ とおくと $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。$\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき $x = \sin\frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のとき $x = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ であり、θ が $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ を動くとき、x は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ から 1 まで単調に増加する。

> **考えてみよう** $\sqrt{1-x^2}$ は $\cos 2\theta$ に等しいのか、それとも $-\cos 2\theta$ に等しいのか。

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$ である。いま考えている範囲では $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ であり、そこでは $\cos 2\theta \geq 0$ なので $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$ となる。したがって

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

第 1 の積分を利用するために、分子を分母を用いて表す。

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

よって、第 1 の結果を用いると

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

最後の積分

$y = 1/x$ とおくと $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ である。$y = 1$ のとき $x = 1$、$y = 2/\sqrt{3}$ のとき $x = \sqrt{3}/2$ である。この範囲では $x > 0$ なので

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

> **考えてみよう** $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$ から出てくる負の符号はどこへ行くのか。

この置換によって積分区間の上端と下端の大小が逆転し、それを入れ替えて元に戻す

ことで負の符号が吸収される。

$$\begin{aligned}\int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_1^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

x^2 の因子がちょうど打ち消し合う。分母に余分な因子 y が入れてあったのはこのためである。

検算

- 第 2・第 3 の積分の被積分関数はどちらも正なので、答えは正でなければならない。実際、$\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6} \approx 0.73205 - 0.52360 = 0.20845$ である。
- 3 つの積分それぞれにシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、第 1 の積分は $0.366025\ldots$（$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ と一致）、第 2・第 3 の積分は $0.208452\ldots$（$\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$ と一致）となる。
- 大まかな見積もり：第 2 の積分では区間の長さが $1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134$ であり、被積分関数は 2（$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき）から 1（$x=1$ のとき）まで減少するので、積分の値は 0.134 と 0.268 の間にあるはずである。実際にそうなっている。

よくある間違い

- 範囲内での $\cos 2\theta$ の符号を確かめずに $\sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \cos 2\theta$ と書いてしまう。
- 積分区間の変更を忘れる、あるいは $y = 1/x$ によって上端と下端が逆転するときに負の符号を落としてしまう。
- $\left[-\cot\theta\right]$ を $\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{6}$ と計算してしまう。これでは絶対値は正しいが符号が逆になる。

STEP のその先へ

最後の小問は、一般的な原理の小さな例である。すなわち、置換とは変数変換であり、ある積分をそっくり別の積分に写すことができる。そして積分区間の端が互いに逆数になっていることに気づけば、$y = 1/x$ がうまくいくという信頼できる手がかりになる。大学最初の解析学（analysis）の講義では、置換積分は連鎖律（chain rule）と微積

分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）から厳密に正当化され、その際、置換が単調（monotonic）であり被積分関数が連続（continuous）である範囲に注意を払う。これはまさに、ここで確認した条件である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）には、こうした式変形の背後にある理論がわかりやすく解説されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。