解答例

STEP I 2002、第 9 問

力学 ・ 斜面上での転倒

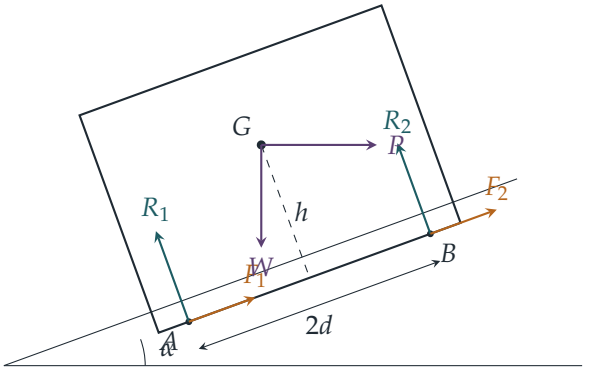
> **STEP I 2002、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q9

鍵となる考え方

トラックはつり合い（equilibrium）の状態にある剛体（rigid body）なので、斜面に沿った方向の力の分解、斜面に垂直な方向の力の分解、そしてモーメント（moments）のつり合いという 3 つの式が得られる。G のまわりのモーメントをとるのがうまい選び方である。重力と P はどちらも G を通るので式から消え、車輪にはたらく力だけが残るからである。この 1 つの式が垂直抗力の差と摩擦力の合計を結びつけ、ほとんどすべての仕事をしてくれる。そうすれば「転倒しない」とは、単にどちらの垂直抗力も負にならないということになる。

解答

トラックを、車輪が斜面上の 2 点 A（低い側）と B（高い側）で接し、その間隔が $2d$ である剛体としてモデル化する。A における垂直抗力（normal reaction）を R_1、B における垂直抗力を R_2 とし、摩擦力（frictional force）を F_1、F_2 とする。摩擦力はどちらも斜面に沿って**上向き**を正とする（どちらかが負になることもありうる）。摩擦は滑りを防ぐのに十分大きいと仮定する。問題にしているのは転倒だけである。図のように P は水平で斜面の方を向いているので、斜面に沿って上向きの成分 $P\cos\alpha$ と、斜面に押しつける向きの成分 $P\sin\alpha$ をもつ。



斜面に垂直な方向と斜面に沿った方向（斜面を上る向きを正とする）に力を分解すると、

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

次に G のまわりのモーメントをとる。重力と P は G を通って作用するので、寄与しない。各垂直抗力は G から垂直距離 d のところに作用し、各摩擦力は斜面に沿って G から垂直距離 h のところに作用する。反時計回りを正とすると（図のように斜面は右に向かって上がっているとする）、R_2 はトラックを G のまわりに反時計回りに回し、R_1 は時計回りに回す。また、斜面に沿って上向きで G より下に作用する摩擦力は反時計回りに回す。したがって

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

小問 (i)

$R_1 = R_2$ ならば、式 (3) は $h(F_1 + F_2) = 0$ となる。$h > 0$ であるから $F_1 + F_2 = 0$ が得られる。すなわち、摩擦力の和は 0 であり、示すべきことが示された。

（(2) より、これが起こるのはちょうど $P = W\tan\alpha$ のときである。このとき P の斜面を上る向きの成分が重力の斜面を下る向きの成分とちょうどつり合うので、斜面は正味の摩擦力をまったく与える必要がない。）

小問 (ii)

(2) を (3) に代入すると

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

となり、これを (1) と組み合わせると

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$
$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

考えてみよう 「転倒しない」とは、これらの式の言葉ではどういう意味だろうか。

地面は車輪を押すことはできるが、引くことはできない。したがって、各垂直抗力は $R \geq 0$ を満たさなければならない。もし R_2 の式が負になったとすると、高い側の車輪を押さえつけておく必要があることになる。実際にはその車輪は浮き上がり、トラックは A のまわりに回転する。同様に、$R_1 < 0$ は B のまわりの回転を意味する。よって、トラックが倒れずにいるのは、ちょうど $R_1 \geq 0$ かつ $R_2 \geq 0$ のときである。

以下では一貫して $\frac{d}{h} = \tan\beta$（$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$）とおき、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。

高い側の車輪が浮かない条件（$R_2 \geq 0$）。 $2R_2 \geq 0$ の両辺に $d/h > 0$ を掛けると

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

両辺に $\cos\beta > 0$ を掛けて項を整理すると

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

すなわち

$$P\cos(\alpha - \beta) \geq W\sin(\alpha - \beta).$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos(\alpha - \beta) > 0$ であり、不等号の向きを変えずにこれで割ることができる：

$$P \geq W\tan(\alpha - \beta).$$

低い側の車輪が浮かない条件（$R_1 \geq 0$）。 同様に、$2R_1 \geq 0$ から

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) - P\cos\alpha + W\sin\alpha \geq 0,$$

が得られ、両辺に $\cos\beta > 0$ を掛けると

$$P(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \leq W(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

すなわち

$$P\cos(\alpha + \beta) \leq W\sin(\alpha + \beta).$$

$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ であれば（問題に示された答えは暗にこれを仮定している。そうでなければ $\tan(\alpha+\beta)$ は負になるか定義されないからである）、$\cos(\alpha+\beta)>0$ であり、これで割ると

$$P \le W\tan(\alpha+\beta).$$

一方、$\alpha+\beta\ge\frac{\pi}{2}$ のときは、$P\ge 0$ に対して左辺は ≤ 0 であり、右辺は正である。したがって、斜面の方を向いた水平な押す力をどれほど大きくしても、トラックが高い側の車輪を軸にして転倒することはない。

2 つの条件を合わせると、トラックが転倒しないための必要十分条件は

$$W\tan(\alpha-\beta) \le P \le W\tan(\alpha+\beta),$$

であり、これが求める結果である。押す力が小さすぎるとトラックは A のまわりに斜面の下側へ倒れ、大きすぎると B のまわりに斜面の上側へ押し倒される。

検算

- **幾何的な見方。** 重力と P を合成すると、G を通る 1 つの力になり、その向きは鉛直方向と角 θ（$\tan\theta = P/W$）をなす。この合力（resultant）が車輪の接点を通るとき、トラックはまさに転倒しようとしている。直線 GA は斜面の法線と角 β をなし、法線は鉛直方向と角 α をなすので、合力は $\theta=\alpha-\beta$ のとき A を通り、$\theta=\alpha+\beta$ のとき B を通る。これらはちょうど 2 つの端点になっている。
- **斜面がない場合。** $\alpha=0$ とすると条件は $|P|\le Wd/h$ となる。これは、水平な地面に置かれた箱が高さ h のところを横から押されても倒れないための、おなじみの条件である。
- **数値。** $W=3$、$\alpha=0.4$、$d=1$、$h=1.5$ とすると、区間は $-0.571\le P\le 4.551$ となる。20 000 個のランダムな設定について $R_1, R_2\ge 0$ を直接調べて区間と照らし合わせたところ、完全に一致し、下端では $R_2=0$、上端では $R_1=0$ となった。

よくある間違い

- G ではなく車輪のまわりのモーメントをとること。それでも解けるが、重力と P のうでの長さが扱いにくくなり、符号の誤りが入り込みやすい。
- 摩擦力が G のまわりにモーメントをもつことを忘れること。摩擦力は斜面上、すなわち G から距離 h だけ下で作用しており、答えに h が現れるのはまさにここからである。

- $\cos(\alpha \pm \beta)$ の符号を確かめずにそれで割ること。不等号の向きを決めるのはこの符号である。

STEP のその先へ

車輪と地面の間の摩擦は**不静定**（statically indeterminate）である。つり合いの条件で決まるのは $F_1 + F_2$ だけであり、F_1 と F_2 を個別に決めることは決してできない。その配分を求めるには、タイヤがどのように変形するかのモデルが必要になる。技術者は、厳密に必要な数より多くの支点をもつ構造物で、この問題にいつも出会っている。上の幾何的な検算は、**合力の作用線**（line of action of the resultant）と支持多角形（support polygon）という考え方であり、歩行ロボットや積み重ねたブロックの安定性の根底にもある。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。