解答例

STEP I 2002、第 8 問

純粋数学 • 複利のローン

> **STEP I 2002、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q8

鍵となる考え方

1 年間に起こることを書き下す。負債は $1+\alpha$ 倍に増え、その後に返済額が差し引かれる。この 1 ステップの漸化式（recurrence relation）を繰り返し展開すると、各返済 R_k は n 年目の終わりには $(1+\alpha)^{n-k}R_k$ の「価値」をもつことがわかる。その分の利息が積み上がるのを防いだからである。残りはすべて等比級数（geometric series）である。最後の近似では、二項定理（binomial theorem）によって $1+\alpha$ のべきを展開し、必要十分な数の項だけを残す。

解答

C_{n+1} の一般式

k 年目の終わりに利息が加わると負債 C_k は $(1+\alpha)C_k$ となり、その後 R_k が返済される。残ったものが $k+1$ 年目の初めの負債である：

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

これを繰り返し適用すると、

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

となる。よって $C_1 = C$ であるから、

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{n-k} R_k}.$$

（これを厳密にするには、$n = 1$ のとき成り立つこと、すなわち $C_2 = (1+\alpha)C - R_1$ であることを確かめ、さらに n で成り立つならば $1+\alpha$ を掛けて R_{n+1} を引くことで $n+1$ でも成り立つことを確かめればよい。）

返済額 $R_k = (1+\alpha)^k r$ の場合

ローンを N 年で完済するとは、$C_{N+1} = 0$ となることである。$R_k = (1+\alpha)^k r$ のとき、和のすべての項は等しい：

$$(1+\alpha)^{N-k} R_k = (1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r = (1+\alpha)^N r.$$

したがって

$$0 = C_{N+1} = (1+\alpha)^N C - N(1+\alpha)^N r = (1+\alpha)^N (C - Nr).$$

$(1+\alpha)^N \neq 0$ であるから $C = Nr$、すなわち $r = C/N$ が得られ、題意が示された。

これは理にかなっている。k 回目の返済は「現在の貨幣価値で」C/N であり、それが k 年分の利息で増えたものである。したがって全体として、元本 C とそれに対するちょうどの利息を返済することになる。

均等返済 R の場合

今度はすべての k について $R_k = R$ であり、$C_{N+1} = 0$ から

$$(1+\alpha)^N C = R \sum_{k=1}^{N} (1+\alpha)^{N-k} = R(1 + (1+\alpha) + \cdots + (1+\alpha)^{N-1}).$$

括弧の中は初項 1、公比 $1+\alpha$、項数 N の等比級数である。よって（$\alpha > 0$ より公比は 1 でないので）その値は

$$\frac{(1+\alpha)^N - 1}{(1+\alpha) - 1} = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}.$$

ゆえに $(1+\alpha)^N C = R\,\dfrac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}$ であり、整理すると

$$\frac{R}{C} = \frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1'}$$

となり、求める結果が得られる。

$\alpha = \frac{1}{50}, N = 4$ の場合

考えてみよう 二項展開の項をいくつ残すべきか。また、なぜ分子は分母よりも少ない項で済むのか。

分母 $(1+\alpha)^4-1$ は α の 1 次から始まるが、分子 $\alpha(1+\alpha)^4$ は 1 から始まる式に α を掛けたものである。したがって α を 1 つ約分すると、分子は $(1+\alpha)^4$、分母は $((1+\alpha)^4-1)/\alpha$ となる。両者を α の 1 次まで正しく求めるには、分子では $(1+\alpha)^4 \approx 1+4\alpha$ でよいが、分母では $(1+\alpha)^4 \approx 1+4\alpha+6\alpha^2$ が必要である（$6\alpha^2$ は α で割ると 6α になる）。よって

$$\frac{R}{C} = \frac{(1+\alpha)^4}{((1+\alpha)^4-1)/\alpha} = \frac{1+4\alpha+6\alpha^2+\dots}{4+6\alpha+4\alpha^2+\alpha^3} \approx \frac{1+4\alpha}{4+6\alpha}.$$

$\alpha = \frac{1}{50}$ とすると、

$$\frac{R}{C} \approx \frac{1+\frac{4}{50}}{4+\frac{6}{50}} = \frac{54}{206} = \frac{27}{103},$$

となり、題意が示された。省いた項の相対的な大きさはおよそ α^2 程度であり、ここでは 1 パーセントにも満たない。

検算

- $N=1$ のとき、公式は $R/C = 1+\alpha$ を与える。C を借りて、1 年分の利息とともに返済するということであり、正しい。
- $\alpha \to 0$ のとき $(1+\alpha)^N - 1 \approx N\alpha$ であるから $R/C \to 1/N$ となる。利息がなければ毎年 C/N を返済すればよいだけである。これは $r = C/N$ とも一致する。
- 正確な値は $R/C = \dfrac{6765201}{25760050} \approx 0.26262$ であり、一方 $27/103 \approx 0.26214$ である。両者の差はおよそ 0.2% である。$R = 0.26262\,C$ として負債を 1 年ずつ追っていくと、4 年後には（丸め誤差を除いて）残債はなくなる。

よくある間違い

- 和の指数を間違える。R_k は k 年目の終わりに支払われるので、それ以降に免れる利息は $n-k+1$ 年分ではなく $n-k$ 年分である。
- 分母でも $(1+\alpha)^4 \approx 1+4\alpha$ と近似してしまう。これでは $R/C \approx 27/100$ となり、より粗い答えで、求める値と一致しない。

STEP のその先へ

量 $\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$ は返済の**現在価値**（present value）であり、ローンが完済されるのは、返済の現在価値が借入額にちょうど等しくなるときである。R の公式は標準的な年金（住宅ローン）の公式（annuity formula）である。$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$ のような漸化式は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）であり、微分方程式 $y' = \alpha y - R(t)$ の離散版にあたる。そして同じ「積分因子」（integrating factor）の考え方で解くことができる。このように代数とモデル化を組み合わせた問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。