解答例

STEP I 2002、第 7 問

純粋数学 • 三角関数の積分

> **STEP I 2002、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q7

鍵となる考え方

I も J も単独では扱いにくそうに見えるが、その和と差はどちらも扱いやすい。両者を足すと分子に分母（denominator）そのものが現れるので、被積分関数（integrand）は 1 になる。両者を引くと分子に分母の**導関数**（derivative）が現れるので、積分は対数（logarithm）になる。後半の二つの積分でも、同じ工夫をより一般的な形で用いる。すなわち、分子（numerator）を「分母の定数倍」と「分母の導関数の定数倍」の和に分解するのである。

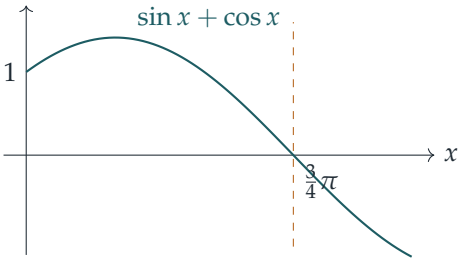
解答

主結果

まず、なぜ a に制限があるのかを確認しておく。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

と書けるので、これは $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ で正であり、初めて零になるのは $x = \frac{3}{4}\pi$ においてである。したがって $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$ ならば、分母は $[0, a]$ 全体で正である。このとき二つの積分はどちらもまったく普通の積分であり、以下に現れる対数の中身も正の数である。



二つの積分を足すと、

$$I + J = \int_0^a \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a.$$

引くと、

$$I - J = \int_0^a \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

分子 $\cos x - \sin x$ はちょうど分母 $\sin x + \cos x$ の導関数であるから、被積分関数は $f'(x)/f(x)$ の形をしており、しかも $[0, a]$ 上で $f > 0$ である。よって

$$I - J = \Big[\ln(\sin x + \cos x)\Big]_0^a = \ln(\sin a + \cos a) - \ln 1 = \ln(\sin a + \cos a).$$

二つの結果を足すと

$$2I = a + \ln(\sin a + \cos a),$$

となり、示すべき式が得られた。（おまけとして、引けば $2J = a - \ln(\sin a + \cos a)$ も得られる。）

小問 (i)

$p, q > 0$ であり、$\sin x$ と $\cos x$ はともに $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で非負かつ同時に零になることはないので、分母 $D(x) = p\sin x + q\cos x$ はこの区間で正である。その導関数は $D'(x) = p\cos x - q\sin x$ である。

? **考えてみよう** 分母に係数 p と q がついているとき、「$I + J$ と $I - J$ を考える」という方法をどう一般化すればよいだろうか？

先ほど和と差がうまくいったのは、分子を足すと分母になり、引くと分母の導関数になったからである。そこで今度は、次を満たす定数 A と B を探す。

$$\cos x = A\,(p\sin x + q\cos x) + B\,(p\cos x - q\sin x) \qquad \text{すべての実数} x.$$

$\sin x$ と $\cos x$ の係数を比較（comparing coefficients）すると、

$$pA - qB = 0, \qquad qA + pB = 1.$$

第 1 式から $B = pA/q$ を得る。これを第 2 式に代入すると $qA + p^2A/q = 1$ となるので、

$$A = \frac{q}{p^2+q^2}, \qquad B = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

これで積分は、易しい部分と対数になる部分に分かれる。

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(A + B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}A + B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A + B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

ここで $D(\frac{\pi}{2}) = p$ と $D(0) = q$ を用いた。これらはともに正である。したがって

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\pi q + p\ln(p/q)}{p^2+q^2}.$$

小問 (ii)

今度は分母が $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$ であり、$D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$ である。$|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$ であるから、分母は正である。D に定数 25 が含まれているので、定数項も一致させなければならない。そこで次を満たす A と B を探す。

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

係数を比較すると、

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{定数項}:\ 25A = 4.$$

最初の二式から $A = \frac{4}{25}$、$B = \frac{3}{25}$ を得る。すると定数項の式 $25\cdot\frac{4}{25} = 4$ も満たされる。方程式が三つで未知数が二つしかないのだから、これは自動的に成り立つことではない。分子の「+4」は、うまくいくように選ばれていたのである。よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

ここで $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$、$D(0) = 4 + 25 = 29$ を用いた。

検算

- $p = q = 1$ のとき、小問 (i) の結果は $a = \frac{\pi}{2}$ における主結果と一致するはずである。主結果からは $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$、すなわち $I = \frac{\pi}{4}$ が得られる。公式からは $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$ が得られる。一致している。

- $a \to \frac{3}{4}\pi$ のとき $\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$ となる。これは、分母が零になる直前では $\cos x < 0$ であるため、I の被積分関数が絶対値の大きな負の値をとることと整合している。
- 数値的には、小問 (ii) の値は $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$ であり、この積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した結果と小数第 12 位まで一致する。また主結果は a の、小問 (i) は p と q の、それぞれ 200 通りの無作為な値について数値積分（quadrature）の結果と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で $\ln(p/q)$ ではなく $\ln(q/p)$ としてしまう。上端 $\frac{\pi}{2}$ で残るのは sin の項であり、値は p になる。
- 小問 (ii) で定数項を忘れ、$\sin x$ と $\cos x$ の係数だけを一致させてしまう。たまたまうまくいくが、それを仮定するのではなく確かめるべきである。

STEP のその先へ

分子を「分母の A 倍と、その導関数の B 倍の和」として書くことは、ささやかな線形代数（linear algebra）である。関数 $\sin x$ と $\cos x$ は 2 次元の空間を張り、$p^2 + q^2 \neq 0$ であれば D と D' はその空間のもう一つの基底（basis）をなす。展開に適した基底を見つけるという同じ考え方は、部分分数分解（partial fractions）や、微分方程式（differential equations）に対する未定係数法（method of undetermined coefficients）の根底にもある。これらは大学 1 年次の数学的手法（methods）の講義で出会うことになる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の対称性を利用した工夫で解ける積分がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。