解答例

STEP I 2002、第 6 問

純粋数学 • 角錐の幾何

STEP I 2002、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

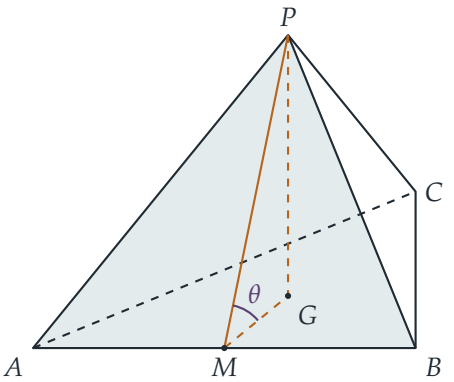
step.maths.org/questions/02-s1-q6

鍵となる考え方

対称性（symmetry）により、頂点（apex）は正三角形（equilateral triangle）の底面の中心の真上にある。したがって高さは三平方の定理（Pythagoras' theorem）を一度使えば求まる。体積がわかれば、新しい高さを直接求める必要はない。どの面を下にして置いても体積は変わらないので、$V = \frac{1}{3} \times (\text{新しい底面の面積}) \times h$ が成り立つ。最後の小問の角は、共通の辺に沿って交わる二つの面のなす角であり、それを最もすっきり捉えるには、頂点を通りその辺に垂直な断面（cross-section）を考えればよい。

解答

底面を ABC、その辺の長さを a とし、頂点を P として $PA = PB = PC = b$ とする。G を ABC の中心、M を AB の中点とする。



体積

底面からの P の高さを H とし、P から下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を F とする。直角三角形 PFA, PFB, PFC は辺 $PF = H$ を共有し、斜辺（hypotenuse）はいずれも b であるから、

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

よって F は三つの頂点から等距離にある。すなわち F は ABC の外心（circumcentre）であり、正三角形ではそれは中心 G に一致する。ABC の中線（median）の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり、G はその中線を頂点の側から $2:1$ に分ける点にあるので、$GA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$ である。三角形 PGA に三平方の定理を用いると、

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

底面の面積は $\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であるから、

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}a^2\left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、示すべき式が得られた。（このような形の角錐（pyramid）が存在するのは $3b^2 > a^2$ のときに限られ、それはちょうどこの値が正の実数となるときである。）

新しい高さ

今度は面 PAB を下にして置く。この面は $PA = PB = b, AB = a$ の二等辺三角形（isosceles triangle）なので、PM は AB に垂直であり、三角形 PMA に三平方の定理を用いると、

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{三角形の面積} PAB = \frac{1}{2}a\cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

考えてみよう h を求めるのに、新しい最上部の頂点の位置を本当に求める必要があるだろうか。

その必要はない。立体そのものは変わっていないので体積は依然として V であり、体積の公式はどの面を底面としても、その面に垂直に測った高さを用いれば成り立つ。よって

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}\cdot h.$$

前の小問の結果と等置すると、

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\,h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

であり、両辺を 2 乗すると

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

となって、示すべき式が得られた。ここで $4b^2 > 3b^2 > a^2$ であるから $4b^2 - a^2 > 0$ である。

正三角形の面の角

新しい置き方では地面は PAB を含む平面であり、正三角形の面 ABC は辺 AB に沿ってこれと交わる。二つの平面のなす角とは、それぞれの平面内で共通の辺上の同じ点からその辺に垂直に引いた二直線のなす角である。点 M において、面 PAB 内の直線 MP は（PAB が二等辺三角形なので）AB に垂直であり、面 ABC 内の直線 MC は（ABC が正三角形なので）AB に垂直である。また G は MC 上にある。よって求める角は $\theta = \angle PMC = \angle PMG$ である。

PG は底面全体に垂直であるから、三角形 PMG は G を直角とする直角三角形である。また GM は中線の 3 分の 1 であり、$GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ である。したがって

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a},$$

となり、正三角形と水平面のなす角は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}\right).$$

G は底面の内部にあるのでこの角は鋭角であり、確かに平面のなす角そのものであって、その補角（supplement）ではない。

新しい高さを用いても同じ結果が得られる。頂点 C は地面から高さ h の位置にあり、面に沿って辺 AB から距離 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ のところにあるので、$\sin\theta = h \big/ \frac{\sqrt{3}}{2} a$ であり、

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}},$$

となる。これらは上で求めた $\tan\theta$ の値と一致する。

検算

正四面体（regular tetrahedron）の場合、すなわち $a = b = 1$ のとき、公式から $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$、$h^2 = \frac{2}{3}$（対称性から当然であるが、もとの高さと同じ）、$\cos\theta = \frac{1}{3}$ が得られる。最後のものは、よく知られた正四面体の二面角（dihedral angle）$\theta \approx 70.53^\circ$ である。$b \to a/\sqrt{3}$ とすると角錐は平たくつぶれて $\theta \to 0$ となり、$b \to \infty$ とすると細長いとが

った形になって $\theta \to 90^\circ$ となる。また、20,000 組の無作為な (a, b) について座標を用いて角錐を構成し、V をスカラー三重積から、h を C から平面 PAB までの距離として、θ を法線ベクトルから計算した。三つともおよそ 10^{-13} の精度で公式と一致した。たとえば $a = 2, b = 3$ のとき $h \approx 1.6956, \theta \approx 78.22^\circ$ である。

よくある間違い

- GA を中線の半分としてしまう、あるいは外接円の半径（circumradius）$\frac{a}{\sqrt{3}}$ が必要なところで内接円の半径（inradius）$\frac{a}{2\sqrt{3}}$ を使ってしまう（最後の小問ではその逆）。
- 面と地面のなす角を、AC や PC のような共通の辺に垂直でない直線を使って測ってしまう。

STEP のその先へ

異なる面を底面として同じ体積を計算することは、体積が立体の切り方や向きによらないという考え方を初めて垣間見る機会である。大学 1 年次の講義では、四面体の体積は $\frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$、すなわちスカラー三重積（scalar triple product）（3×3 の行列式（determinant））として表され、面のなす角はそれらの法線ベクトル（normal vector）のなす角として求められる。上の数値による検算もこの方法で行った。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、行列式を体積として展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。