解答例

# STEP I 2002、第 5 問

純粋数学 • 多項式の整数解

> **STEP I 2002、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q5

## 鍵となる考え方

一次因数（linear factor）の積として書かれた多項式（polynomial）は、特別な点での値を求めやすい。$x = 0$、$x = 1$、$x = -1$ を代入すると、因数分解された形はそれぞれ $k_i$、$k_i + 1$、$k_i - 1$ の積になり、一方で展開された形は係数の和を与える。四次式（quartic）の場合、これらの値は決まった整数であり、根（root）が整数であることから、各 $k_i \pm 1$ はある既知の数の約数（divisor）でなければならない。これらの数を素因数分解すると、可能性はほとんど残らない。

## 解答

### 3 つの恒等式

$f(x)$ の 2 つの表示は同じ多項式であるから、すべての $x$ の値で一致する。

$x = 0$ を代入する。展開された形では、他のすべての項が因数 $x$ を含むので $f(0) = a_n$ となる。因数分解された形では $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$ となる。よって

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

$x = 1$ を代入する。$x$ のすべての累乗が 1 になるので、展開された形は $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を与え、因数分解された形は $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$ を与える。よって

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

となり、示すべき式が得られた。

$x = -1$ を代入する。因数分解された形は $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$ を与える。展開

された形では、項 $a_j x^{n-j}$ は（$(-1)^{-j} = (-1)^j$ を用いて）$(-1)^{n-j}a_j = (-1)^n(-1)^j a_j$ となるので、

$$(k_1-1)(k_2-1)\cdots(k_n-1) = (-1)^n(1-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n).$$

$n$ が偶数のときは、これは単に $1-a_1+a_2-\cdots+a_n$ である。$n$ が奇数のときは、すべての符号が反転する。

### 四次式

四次式を $f(x) = (x+k_1)(x+k_2)(x+k_3)(x+k_4)$ と書く。すると根は $-k_1,\ldots,-k_4$ であり、これらは整数である。$n=4$ として恒等式を用いると、

$$\begin{aligned} k_1k_2k_3k_4 &= 576 = 2^6\cdot 3^2,\\ (k_1+1)(k_2+1)(k_3+1)(k_4+1) &= 1+22+172+552+576 = 1323 = 3^3\cdot 7^2,\\ (k_1-1)(k_2-1)(k_3-1)(k_4-1) &= 1-22+172-552+576 = 175 = 5^2\cdot 7. \end{aligned}$$

**各 $k_i$ は 2 以上である。**すべての係数が正であるから、$x \geq 0$ であるすべての $x$ に対して $f(x) > 0$ である。したがってすべての根は負であり、各 $k_i$ は正の整数である。さらに、どの $k_i$ も 1 に等しくはない。もし等しければ、3 番目の積は 175 ではなく 0 になってしまうからである。よって各 $i$ について $k_i \geq 2$ であり、$k_i-1$ と $k_i+1$ はすべて正の整数である。

**考えてみよう** 3 つの積から、$k_i$ の候補の短いリストをどのように作ればよいか？

各 $k_i-1$ は 175 の正の約数であり、各 $k_i+1$ は 1323 の正の約数である。175 の約数は $1,5,7,25,35,175$ であるから、

$$k_i \in \{2,6,8,26,36,176\}, \qquad k_i+1 \in \{3,7,9,27,37,177\}.$$

これらの $k_i+1$ の値のうち、$1323 = 3^3\cdot 7^2$ を割り切るのは $3,7,9,27$ だけである（37 は素数（prime）であり、$177 = 3\cdot 59$ であるから）。よって各 $k_i$ は $2,6,8,26$ のいずれかであり、各 $k_i+1$ は $3,7,9,27$ のいずれかである。

ここで積 $\prod(k_i+1) = 3^3\cdot 7^2$ に注目する。

- 因数 $7^2$ は 7 に等しい因数からしか生じないので、$k_i+1$ のうちちょうど 2 つが 7 に等しい。すなわち $k_i$ のうち 2 つは 6 である。
- 残りの 2 つの因数は $\{3,9,27\}$ に属する 3 の累乗で、積が $3^3 = 27$ である。それぞれ 3 以上であるから 27 は不可能であり（相方が 1 になってしまう）、可能なのは $3\times 9$ だけである。よって残りの $k_i$ は 2 と 8 である。

したがって $\{k_1,k_2,k_3,k_4\}=\{2,6,6,8\}$ である。1 番目の積で確かめると、$2\cdot6\cdot6\cdot8=576$ となり、確かに成り立つ。展開しても確認できる：

$$(x+2)(x+8)=x^2+10x+16,\qquad (x+6)^2=x^2+12x+36,$$

および

$$(x^2+10x+16)(x^2+12x+36)=x^4+22x^3+172x^2+552x+576.$$

よって根は

$$x=-2,\quad x=-6\text{（重根）},\quad x=-8.$$

である。

## 検算

- $k_i$ の和は $2+6+6+8=22$ であり、$x^3$ の係数と一致する。
- $f(-6)=1296-4752+6192-3312+576=0$ であり、さらに $f'(x)=4x^3+66x^2+344x+552$ も $x=-6$ で 0 になる。これにより $-6$ が二重根（double root）であることが確かめられる。
- 恒等式の簡単な数値テスト：$f(x)=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$ に対して、$(2-1)(-3-1)=-4$ および $1-(-1)+(-6)=-4$ が得られる。

## よくある間違い

- $x=-1$ の結果で符号を誤る。$n$ が奇数のときは因数 $(-1)^n$ が効いてくる。
- 重根（repeated root）が許されることを忘れる。1323 の中に $7^2$ があると分かった時点で、$k_i$ のうち 2 つは等しくなければならない。
- すべての $k_i\geq 2$ であることを先に示さずに、正の約数だけを列挙する。この段階こそが、すべての $k_i\pm1$ を正にしているのである。

## STEP のその先へ

ここでの恒等式は、多項式の係数を根の基本対称式（elementary symmetric functions）として表す、解と係数の関係（ヴィエトの公式、Vieta's formulae）の特別な場合である。約数を用いた議論は、有理根定理（rational root theorem）や、整数係数多項式の因数分解に関するガウス（Gauss）の補題（Gauss's lemma）の親戚であり、これらは

環（ring）に関する最初の講義で学ぶ。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。