解答例

STEP I 2002、第 4 問

純粋数学 ・ 接線と不等式

> **STEP I 2002、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q4

鍵となる考え方

$(0,1)$ を通り、その先で曲線に接する直線は、その 2 点の間では曲線の下になければならない。曲線はそこで上に凸（concave）であり、その後平らになっていくからである。直線の下の領域は台形（trapezium）であり、それを y 軸のまわりに回転させると円柱（cylinder）と円錐（cone）が得られるので、その面積と体積は微積分を使わずに容易に求められる。それらを曲線の下の正確な面積および体積と比較することで、2 つの不等式が得られる。

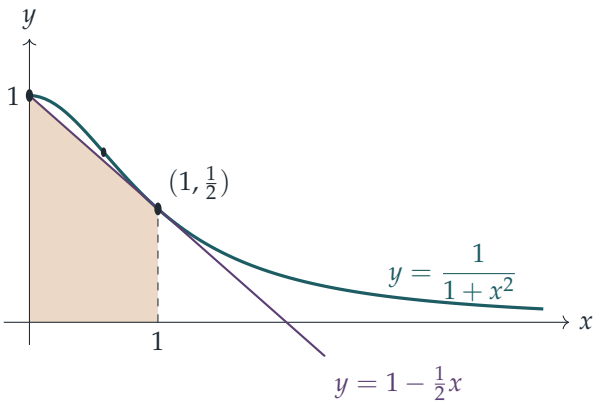
解答

概形

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ とおく。このとき $f(0) = 1$、$f(x) > 0$ であり、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。微分すると

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

よって $f'(0) = 0$（曲線は $(0,1)$ で水平に始まる）であり、$x > 0$ では $f'(x) < 0$ であるから、曲線は常に減少する。また、$0 \le x < 1/\sqrt{3}$ では $f''(x) < 0$、$x > 1/\sqrt{3}$ では $f''(x) > 0$ であるから、$(1/\sqrt{3}, \frac{3}{4})$ に変曲点（point of inflection）がある。曲線は y 軸の近くでは上に凸（下向きに曲がる）であり、それより遠くでは下に凸（convex）である。



影をつけた台形は、$0 \le x \le 1$ における直線の下の領域であり、曲線の下の領域の内部にある。

直線

直線は $(0, f(0)) = (0,1)$ を通るので、ある傾き（gradient）m を用いて $y = 1 + mx$ と表せる。この直線が $x = a > 0$ で接する（tangent）とする。そこでは 2 つの条件が成り立たなければならない。

曲線と交わる： $1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$ であるから $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$ であり、$a \neq 0$ より

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

曲線と同じ傾きをもつ： $m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$。

これらを等しいとおき、$-a/(1+a^2)$ で割る（$a > 0$ なので許される）と $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$ となるから、$a^2 = 1$ であり、$a > 0$ より $a = 1$ である。このとき $m = -\frac{1}{2}$ であり、直線は

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

で、曲線と $(1, \frac{1}{2})$ で接する。

他に交点がないこと

直線から曲線を引く：

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

これが 0 になるのは $x = 0$ または $x = 1$ のときに限る。したがって直線は曲線と $x = 0$ および接点 $x = 1$ で交わり（重複因数 $(x-1)^2$ は接することの代数的な現れである）、それ以外では交わらない。$x \ge 0$ の範囲でも、実は負の x でも交わらない。

ここから、次に必要なことも読み取れる。$x > 0$ かつ $x \neq 1$ のとき、この式は真に負であるから

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{ただし} 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

（左側の不等式は、$[0,1]$ 上で $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$ であることから成り立つ。）よって $[0,1]$ 上では、端点を除いて直線は曲線の真に下にあり、概形の図のとおりである。

$\pi > 3$

$(*)$ を $[0,1]$ で積分する。2 つの関数は連続であり、開区間上で曲線は直線の真に上にあるので、不等式は積分しても狭義のまま保たれる：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

左辺は $\frac{\pi}{4}$ である（$[\arctan x]_0^1$ に等しい）。右辺は、平行な 2 辺が 1 と $\frac{1}{2}$、幅が 1 である影つきの台形の面積なので、$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ である。よって $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$、すなわち

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

次に、同じ 2 つの領域（$0 \leq x \leq 1$ の部分）を y 軸のまわりに 2π だけ回転させる。$(*)$ より台形は曲線の下の領域の内部にあるので、その回転体ももう一方の回転体の内部にあり、体積は小さい。

考えてみよう 曲線が x の式で y として与えられているとき、y 軸のまわりの回転体の体積（volume of revolution）はどのように求めればよいか。

円筒殻法（cylindrical shells）を用いる。x における幅 δx、高さ y の細い帯は、体積がおよそ $2\pi x\, y\, \delta x$ の円筒殻を描くので、体積は $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$ である。（あるいは水平に切ってもよい。「検算」を参照。）

曲線については

$$V_{\text{曲線}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi[\ln(1+x^2)]_0^1 = \pi \ln 2,$$

となる。分子 $2x$ が分母の導関数だからである。

直線については、立体は半径 1、高さ $\frac{1}{2}$ の円柱（台形のうち $y = \frac{1}{2}$ より下の部分から生じる）の上に、半径 1、高さ $\frac{1}{2}$ の円錐（その上の三角形から生じる）が載ったものである。よって

$$V_{\text{直線}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

円筒殻法による確認：$\int_0^1 2\pi x(1-\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x = 2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}) = \frac{2\pi}{3}$。

被積分関数 $2\pi x(\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x}{2})$ は連続であり、$(*)$ より $[0,1]$ 上で非負、$(0,1)$ 上で真に正であるから、$V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$ である：

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

これが示すべきことであった。

検算

- 数値的には $\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$、$\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$ であり、どちらの不等式も正しく、しかもどちらもそれほど余裕があるわけではない。
- 代わりに水平に切る場合：$\frac{1}{2} \le y \le 1$ では曲線上で $x^2 = \frac{1}{y} - 1$ であるから、体積は円柱 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$ と $\int_{1/2}^1 \pi\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$ の和であり、やはり $\pi \ln 2$ となる。
- 因数分解の簡単な確認：$x = 2$ では直線は 0、曲線は $\frac{1}{5}$ を与え、差は $-\frac{1}{5}$ である。公式からは $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$ となる。

よくある間違い

- 一般の点における接線を求めたものの、それが $(0,1)$ を通るという条件を忘れる（またはその逆）。a を決定するには両方の条件が必要である。
- 「$\ge$」で止まってしまう。狭義の不等式を得るには、ある区間上で直線が曲線の真に下にあることが必要であり、それを保証するのが因数 $x(x-1)^2$ である。
- 誤って x 軸のまわりに回転させてしまう。その場合は $\int \pi y^2\,\mathrm{d}x$ となり、異なる値が得られる。

STEP のその先へ

この議論は比較原理（comparison principle）である：区間上で $g \le h$ であり、どこかで狭義の不等式が成り立ち、両者が連続ならば、$\int g < \int h$ となる。「どこかで狭義に」を厳密にすることは、積分を上限和と下限和によって定義する最初の解析学の講義における典型的な演習問題である。単純な図形の面積によって π を評価する方法はアルキメデス（Archimedes）にさかのぼり、この問題のはるかに精密な版（たとえば $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$）は調べてみる価値がある。解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。